Schemi di controllo centralizzato

Claudio Melchiorri

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Università di Bologna

email: claudio.melchiorri@unibo.it

Sommario

Controllo PD + compensazione di gravità

Si vuole determinare un controllore che assicuri una globale asintotica stabilità al sistema dinamico non lineare descritto da

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

Sia data una configurazione di equilibrio descritta da $\mathbf{q}_d$. Si definisca

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$$

e si consideri il sistema dinamico con stato definito da

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

Per la determinazione del controllore, si utilizza il *metodo diretto di Lyapunov*.

Controllo PD + compensazione di gravità

Si considera la funzione candidata di Lyapunov

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} > 0 \qquad \forall \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{K}_P$ è una matrice quadrata definita positiva.

La funzione $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è composta di due termini:

- $1/2 \;\; \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$
  che rappresenta l'energia cinetica del sistema;
- $1/2 \;\; \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}$
  che può essere considerato come energia elastica immagazzinata da un sistema di molle con rigidezza equivalente $\mathbf{K}_P$ realizzato dagli anelli di controllo.

Controllo PD + compensazione di gravità

Derivando V rispetto al tempo ($\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$):

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}$$

ma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} \\
&= \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T [\mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}]
\end{aligned}$$

Però:

- $\dot{\mathbf{q}}^T [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\dot{\mathbf{q}} = 0$ per la scelta fatta di $\mathbf{C}$;
- $-\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$ è definito negativo;
- scegliendo
$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}$$
ci si assicura che $\dot{V}$ sia semidefinita negativa, poichè
$$\dot{V} = 0 \qquad \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}}$$

Controllo PD + compensazione di gravità

In realtà, si ottiene questo risultato anche con la scelta:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}$$

essendo $\mathbf{K}_D$ una matrice definita positiva, in quanto si ha

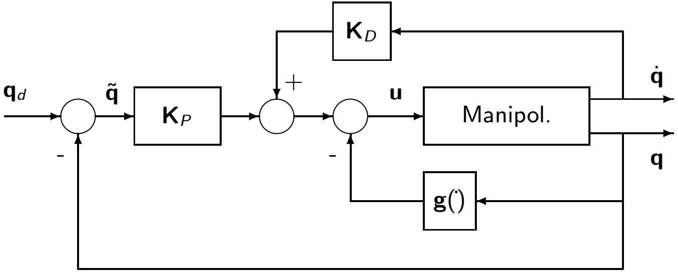
$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{D} + \mathbf{K}_D) \dot{\mathbf{q}}$$

e quindi un miglioramento in termini di rapidità di convergenza delle traiettorie a zero.

Il termine $\mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}$ equivale all'introduzione di un'azione derivativa nell'anello di controllo.

Controllo PD + compensazione di gravità

Osservazioni:



- Legge di controllo non lineare nei termini gravitazionali e con azione lineare di tipo PD: il sistema risulta asintoticamente globalmente stabile per qualsiasi scelta di $\mathbf{K}_P$, $\mathbf{K}_D$ definite positive
- L'azione derivativa è essenziale in sistemi con bassi coefficienti di attrito $\mathbf{F}$, ad esempio Direct Drive controllati in corrente: il basso smorzamento elettrico viene aumentato dall'azione di controllo;

Controllo PD + compensazione di gravità

- V decresce fintanto che $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$. Si può vedere che si raggiunge uno stato di equilibrio individuato dalla evoluzione di

  $$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{q}}$$

  All'equilibrio ($\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) si ha

  $$\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

  e quindi

  $$\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$$

- il calcolo di $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ deve essere perfetto, altrimenti la metodologia presentata non consente di trarre nessuna conclusione sulla stabilità (*robustezza* del controllore).

Controllo a dinamica inversa

Sistema MIMO non lineare descritto da

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

o, in breve

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}$$

Si vuole determinare il controllo $\mathbf{u}$ in modo da avere un sistema MIMO lineare.

Si ottiene questo risultato (*linearizzazione globale*) mediante una retroazione non lineare dello stato.
Si può dimostrare che tale controllo esiste in quanto:

- il modello è lineare nel controllo $\mathbf{u}$;
- la matrice $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ è invertibile per qualsiasi configurazione del manipolatore.

Si sceglie il controllo $\mathbf{u}$ dipendente dallo stato del manipolatore:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Controllo a dinamica inversa

Con il controllo $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

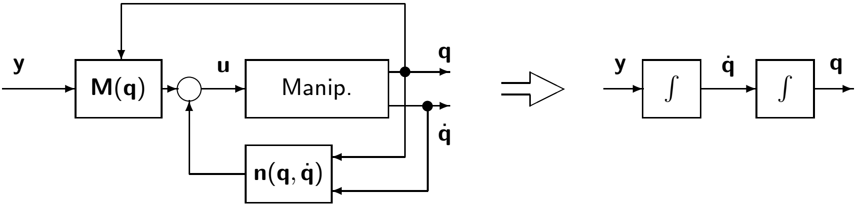
si ottiene

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n} = \mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{n}$$

e quindi

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

dove $\mathbf{y}$ è il nuovo ingresso del sistema.



Controllo a dinamica inversa

Controllo a dinamica inversa: si deve calcolare la dinamica inversa del manipolatore.

Complessivamente il sistema risulta lineare e disaccoppiato rispetto a $\mathbf{y}$: y_i influenza solamente q_i ($y_i = \ddot{q}_i$)

Si deve ora determinare una legge di controllo $\mathbf{y}$ che stabilizzi il sistema. Scegliendo

$$\mathbf{y} = -\mathbf{K}_P\mathbf{q} - \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{r}$$

da $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$ si ottiene

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_P\mathbf{q} = \mathbf{r}$$

che, se le matrici $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_D$ sono definite positive, risulta asintoticamente stabile.

Controllo a dinamica inversa

Se le matrici $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_D$ vengono scelte diagonali, e definite da

$$\mathbf{K}_P = diag\{\omega_{ni}^2\} \qquad\qquad \mathbf{K}_D = diag\{2\delta_i\omega_{ni}\}$$

si ottiene una dinamica per l'i-esima componente specificata dalla pulsazione naturale ω_{ni} e dal coefficiente di smorzamento δ_i.

Per ottenere l'inseguimento di una data traiettoria $\mathbf{q}_D(t)$, a questo punto si può imporre

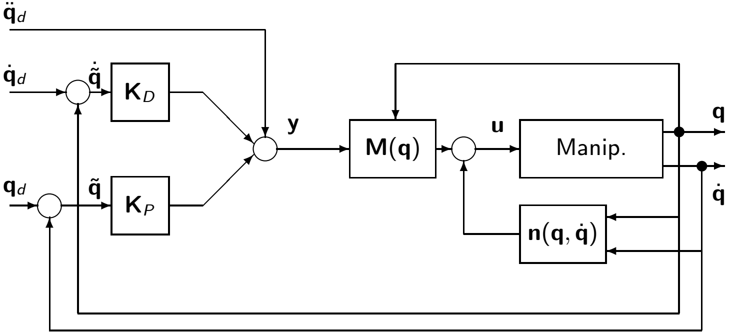
$$\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_P\mathbf{q}_d$$

e quindi complessivamente si ottiene la dinamica dell'errore di inseguimento:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

L'errore è presente solo se $\tilde{\mathbf{q}}(0) \neq \mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) \neq \mathbf{0}$, e converge a zero con dinamica dipendente da $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_D$.

Controllo a dinamica inversa



Si ha complessivamente un sistema con due anelli di controllo.

- Il primo è basato su una retroazione non lineare dello stato e fornisce un modello lineare e disaccoppiato tra le variabili $\mathbf{y}$ e $\mathbf{q}$ (doppio integratore);
- il secondo è lineare e stabilizza il sistema complessivo, ed il suo progetto è facilitato in quanto la dinamica che deve stabilizzare risulta lineare e stazionaria;
- è richiesto il calcolo di tutti i termini del modello dinamico $(\mathbf{M}(\mathbf{q}), \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{D}, \mathbf{g}(\mathbf{q}))$ che deve essere svolto *in tempo reale* poichè si ha un controllo con retroazione dello stato;

Controllo a dinamica inversa

Ci sono problemi di carattere realizzativo:

- conoscenza *esatta* del modello del manipolatore (carichi, dinamiche non modellate, approssimazione nei parametri meccanici e geometrici, . . .);
- calcolo in linea dei vari contributi dinamici;

Si considerano solo i termini principali, e le compensazioni risultano imperfette. Necessità di tecniche di controllo che compensano modelli non precisi:

- Controllo robusto (sliding mode, ...);
- Controllo adattativo.

Controllo a dinamica inversa - Esempio

Sistema non lineare: $(2 + \sin q)\ddot{q} + \dot{q}^3\sqrt{1 - 0.5\cos q} + \sqrt{1 + q^2} = u$

Traiettoria desiderata: lineare con raccordi parabolici.

$k_p = 100, \qquad k_d = 14$