Una breve introduzione alla

Teoria della passività

Claudio Melchiorri

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica (DEIS)

Università di Bologna

email: claudio.melchiorri@unibo.it

Sommario

Bibliografia:

1. A. van der Schaft, *L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Springer-Verlag, 2000
2. R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland, B. Maschke, *Dissipative Systems: Analysis and Control*, Springer-Verlag, 2000
3. R. Ortega, A. Lorìa, P.J. Nicklasson, H. Sira-Ramirez, *Passivity-Based Control of Euler-Lagrangian Systems*, Springer-Verlag, 1998
4. V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, H. Bruyninckx, (Eds.), *Modeling and Control of Complex Physical Systems: The Port-Hamiltonian Approach*, Springer-Verlag, 2009
5. C.I. Byrnes, A. Isidori, J.C. Willems, *Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems*, IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. 36, pp. 1228-1240, 1991.
6. M.V. Popov, *Hyperstability of Automatic Control Systems*, Editura Academiei Rep. Soc. Romania, Bucharest, 1966, (*romanian*).
7. P.C. Parks, *Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems*, IEEE Trans. Aut. Control, Vol. 11, pp. 362-367, 1966.
8. J.C. Willems, *Dissipative Dynamical Systems – Part I: General Theory*, Arch. Rational Mechanics and Analysis, Vol. 45, pp. 321-351, 1972.
9. Y.D. Landau, *Adaptive Control*, New York: Marcel Dekker, 1979.
10. C.A. Desoer, M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, 1975.

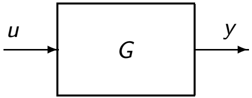
Passività: concetti generali

Passività

La *passività* rappresenta uno strumento generale molto elegante e potente per l'analisi di sistemi dinamici, lineari e non lineari, e per il progetto di sistemi di controllo.

Originariamente, i concetti di passività sono stati sviluppati nell'ambito della teoria dei circuiti, e applicati nei controlli dai lavori di Popov negli anni '60.

Nello studio delle proprietà legate alla passività, ci si basa su di una descrizione ingresso/uscita del sistema e su considerazioni energetiche.



Passività: concetti generali

Passività

Concetti legati alla *"passività"* si ritrovano in molte aree della scienza: matematica, fisica, elettronica, controllo, robotica, ...

Rappresentano strumenti che si sono rilevati utili o indispensabili nella soluzione di complessi problemi di controllo: attenuazione attiva di vibrazioni, sistemi elettromeccanici, motori a combustione, sviluppo di tecniche di controllo (es.: controllo adattativo, H_2, ...)

L'idea principale alla base di questi studi è che molti sistemi fisici hanno deteminate caratteristiche comuni I/O legate alla conservazione, al trasporto e alla dissipazione dell'energia, caratteristiche che permettono una generalizzazione e lo sviluppo di strumenti di analisi e sintesi molto potenti e generali.

Passività: concetti generali

Studiando sistemi passivi, è a volte opportuno riferirsi a modelli (sia nello spazio degli stati che con relazioni ingresso/uscita) che riflettano le *caratteristiche di dissipazione del sistema*.

Si devono introdurre opportune funzioni e definizioni:

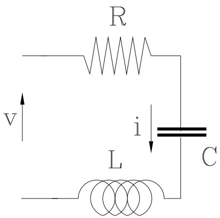
- energia *entrante* nel sistema;
- energia *immagazzinata* dal sistema;
- energia *dissipata* dal sistema.

Alcune caratteristiche dei sistemi passivi:

- la *robustezza* intrinseca di sistemi passivi (utile in fase di progetto);
- l'*interconnessione* di sistemi passivi rimane ancora passiva;
- le considerazioni legate alla passività possono essere di guida anche nella scelta delle variabili di uscita (scelta/posizionamento di sensori di misura);
- la passività è direttamente collegabile alla *stabilità* (e.g. le funzioni di Lyapunov sono spesso determinate sulla base di considerazioni energetiche).

Esempio 1: Circuito elettrico.

Dalle leggi di Kirhoff:



$$v = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + L\frac{di}{dt}$$

da cui (moltiplicando per i)

$$vi = Ri^2 + \frac{1}{C}i\int_0^t i(\tau)d\tau + Li\frac{di}{dt}$$

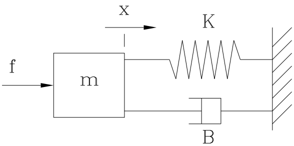
ovvero, definendo $V = V_C + V_L$ (energia totale del circuito)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2C}(\int_0^t i(\tau)d\tau)^2 + \frac{L}{2}i^2\right) = \dot{V} = vi - Ri^2 \implies \begin{cases} V_C = \frac{1}{2C}(\int_0^t i(\tau)d\tau)^2 \\ V_L = \frac{L}{2}i^2 \end{cases}$$

e integrando:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t v(\tau)i(\tau)d\tau - \int_0^t Ri^2(\tau)d\tau \implies \begin{cases} \int_0^t v(\tau)i(\tau)d\tau & \rightarrow \text{energia fornita} \\ \int_0^t Ri^2(\tau)d\tau & \rightarrow \text{energia dissipata} \end{cases}$$

Esempio 2: Sistema meccanico



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

Energia del sistema:

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (\geq 0)$$

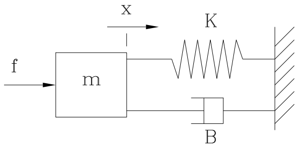
Derivando la funzione V:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x, \dot{x}) &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \\ &= f\dot{x} - b\dot{x}^2 \end{aligned}$$

e integrando $\dot{V}$ rispetto al tempo:

$$V(x(t), \dot{x}(t)) = V(x(0), \dot{x}(0)) + \int_0^t f(\tau)\ \dot{x}(\tau)d\tau - \int_0^t b\ \dot{x}^2(\tau)d\tau$$

Esempio 2: Sistema meccanico



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

Se $f = 0, b = 0 \quad \Longrightarrow \quad V = cost = V(x(0), \dot{x}(0)) \qquad (m\ddot{x} + kx = 0)$

Se $b \geq 0$ e $V(x(0), \dot{x}(0)) > 0$, allora

$$\int_0^t f(\tau)\dot{x}(\tau)d\tau \geq -V(x(0), \dot{x}(0)) \tag{1}$$

ovvero

$$-\int_0^t f(\tau)\dot{x}(\tau)d\tau \leq V(x(0), \dot{x}(0))$$

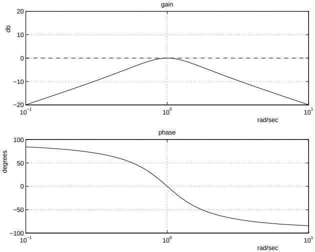
$\Longrightarrow$ l'energia totale che può essere estratta dal sistema è limitata dall'energia iniziale del sistema stesso.

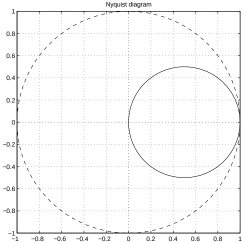
In termini di trasformate di Laplace, si ha che

$$(ms^2 + bs + k)x(s) = f(s) \qquad \Longrightarrow \qquad G(s) = \frac{v(s)}{f(s)} = \frac{s}{ms^2 + bs + k}$$

Questa funzione di trasferimento è stabile e (per $s = j\omega$) ha fase in modulo sempre inferiore o uguale a 90^o:

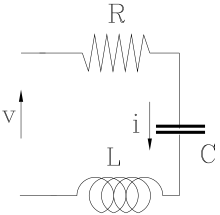
$$|arg\{G(j\omega)\}| \leq 90^o \qquad \Longrightarrow \qquad Re\{G(j\omega)\} \geq 0$$





Queste proprietà sono una conseguenza della (1), e possono essere di grande importanza per il progetto di un controllore.

Circuito RLC:



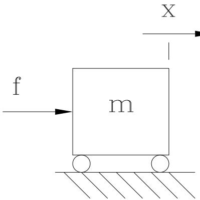
Il circuito RLC ha come fdt

$$G_c(s) = \frac{i(s)}{v(s)} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + C}$$

che risulta stabile e che (per $s = j\omega$) ha fase in modulo sempre inferiore o uguale a 90^o:

$$|arg\{G_c(j\omega)\}| \leq 90^o \qquad \Longrightarrow \qquad Re\{G_c(j\omega)\} \geq 0$$

Esempio 3 (massa in moto con controllo PD):



Sistema: $m\ddot{x} = u$

Controllo PD: $u = -k_p x - k_d \dot{x}$

In catena chiusa si ha: $m\ddot{x} + k_d \dot{x} + k_p x = 0$

Equazione analoga a quella di una massa collegata ad una "molla" di rigidezza k_p e ad uno smorzatore di valore k_d.

termine proporzionale k_p $\Longrightarrow$ molla

termine derivativo k_d $\Longrightarrow$ smorzatore

Esempio 3 (massa in moto con controllo PD):

In modo simile a quanto visto prima si può definire (con un'analogia meccanica)

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_p x^2$$

e si può vedere che questo sistema risulta stabile e che converge alla posizione

$$x = 0; \qquad \dot{x} = 0$$

La stabilità può essere quindi 'dimostrata' con considerazioni legate alla passività.

Si ha stabilità per qualsiasi valore (positivo) di k_p, k_d, e ciò non dipende dal valore di m.

Esempio 4: Controllo adattativo

Sia dato un sistema descritto dall'equazione:

$$\dot{x} = ax + u$$

con a parametro incognito.

Dato un riferimento $x_d(t)$ da inseguire, si consideri il controllo

$$u = -k\,e - \hat{a}\,x + \dot{x}_d \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \hat{a} & \rightarrow \quad \text{stima di } a \\ e = x - x_d & \rightarrow \quad \text{errore di inseguimento} \\ \tilde{a} = \hat{a} - a & \rightarrow \quad \text{errore di stima} \end{cases}$$

Si ottiene complessivamente la dinamica dell'errore:

$$\dot{e} + ke = -\tilde{a}x = \psi$$

cioè

$$\frac{de}{dt} = -ke - \tilde{a}x$$

Definendo una funzione

$$V_e(e) = \frac{1}{2}e^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{V}_e = e\dot{e} = e\psi - ke^2 \quad \begin{cases} ke^2 & \rightarrow \quad \text{“potenza dissipata”} \\ e\psi & \rightarrow \quad \text{“potenza fornita”} \end{cases}$$

Notare che si ha

$$\int_0^t e(\tau)\psi(\tau)d\tau \geq -V_e(e(0))$$

HP: si definisca una seconda funzione ‘energia’ $V_a(\tilde{a}) \geq 0$ tale che

$$\dot{V}_a(\tilde{a}) = -e\psi$$

da cui

$$\int_0^t [-\psi(\tau)]e(\tau)d\tau \geq -V_a(\tilde{a}(0))$$

Si ha quindi che

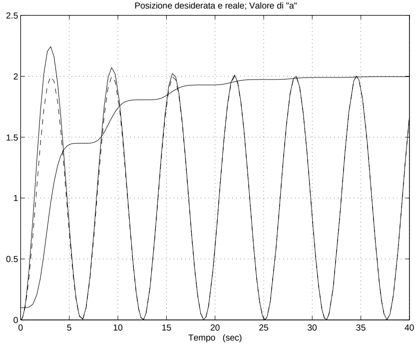
$$V(e, \tilde{a}) = V_e(e) + V_a(\tilde{a}) \quad \Longrightarrow \quad \dot{V} = -ke^2$$

Basta scegliere la legge di adattamento

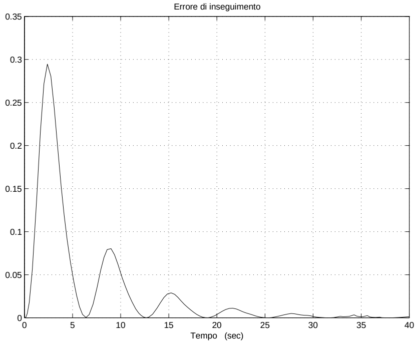
$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = xe \qquad \Longrightarrow \qquad V_a(\tilde{a}) = \frac{1}{2}\tilde{a}^2$$

Controllo adattativo definito utilizzando argomenti legati a concetti energetici.

Risultati simulativi:

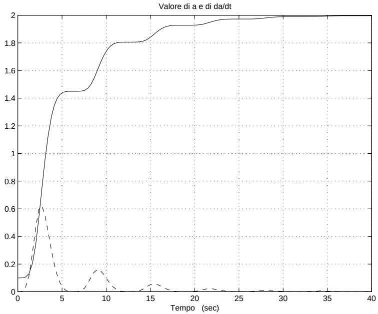


Riferimento x_d, uscita x e stima $\hat{a}$ del parametro $a(= 2)$



Errore di inseguimento $x - x_d$

Risultati simulativi:



stima di a e andamento di da/dt

Sistemi Passivi e Sistemi Dissipativi

Passività, Dissipatività:

proprietà di un sistema fisico relative alla conservazione e trasmissione dell'energia.

Si considerino sistemi autonomi (ingresso nullo). In questo caso l'energia complessiva può:

- mantenersi costante
- decrescere

Per la passività/dissipatività vi sono definizioni diverse che si applicano a sistemi lineari e a sistemi nonlineari.

Sistemi Passivi e Sistemi Dissipativi

Sistemi lineari (funzioni di trasferimento):

sistema con energia costante $\Longrightarrow$ sistema *positivo reale* o PR

sistema con energia decrescente $\Longrightarrow$ sistema *strettamente positivo reale* o SPR

Sistemi nonlineari:

sistemi *dissipativi*

Osservazioni:

- I sistemi PR derivano da studi su circuiti elettrici lineari composti da resistenze, capacità ed induttanze (RLC).
  L'impedenza tra due punti qualsiasi di un circuito lineare è sempre PR.
- Vale anche il viceversa: qualsiasi fdt PR può essere rappresentata in termini di un circuito lineare RLC.

La definizione e lo studio di sistemi passivi non richiede necessariamente l'introduzione di norme, ma solo del concetto di energia e quindi l'introduzione di una rappresentazione *consistente* del sistema.

Norme e spazi normati

Definizione

L'insieme $L_q[0,\infty) = L_q, \quad q = \{1, 2, \ldots\}$ *consiste di tutte le funzioni* f *tali che:*

$$L_q = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \mid \int_0^\infty |f(t)|^q dt < \infty \right\}$$

L'insieme $L_\infty[0,\infty) = L_\infty$ *consiste di tutte le funzioni* f *tali che:*

$$L_\infty = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \mid \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)| < \infty \right\}$$

NB: Lo spazio L_q è uno spazio lineare normato completo (di Banach) rispetto alla norma:

$$\begin{aligned} \|f\|_q &= \left(\int_0^\infty |f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ \|f\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)| \end{aligned}$$

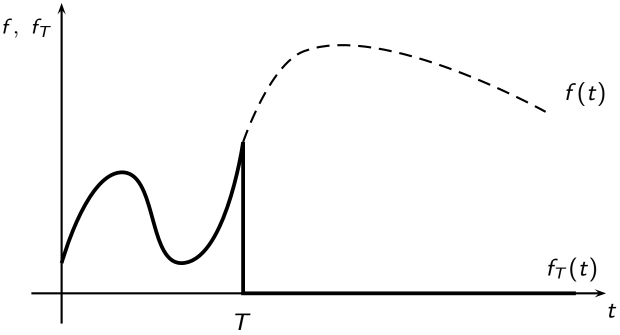
Norme e spazi normati

Definizione

Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Si definisca la funzione* $f_T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \forall T \in \mathbb{R}^+$ *come:*

$$f_T = \begin{cases} f(t) & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{cases}$$

f_T *è la funzione* f troncata *su* $[0, \ T]$



Norme e spazi normati

Definizione

L'insieme $L_{qe}, \quad q = \{1, 2, \ldots\}$ *consiste di tutte le funzioni* f *tali che*

$$L_{qe} = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \mid f_T \in L_q, \forall T,\ 0 \leq T < \infty \right\}$$

L_{qe} è l'estensione di L_q *ovvero lo* spazio L_q esteso.

Ovviamente, $\quad L_q \subset L_{qe}$

Inoltre valgono le due proprietà:

1. $\forall f \in L_{qe}$ la mappa $T \to \|f_T\|_q$ è monotona crescente
2. $\forall f \in L_q$ la mappa $\|f_T\|_q \to \|f\|$ se $T \to \infty$

Norme e spazi normati

Il caso L_2 è speciale: la definizione di norma si associa a quella di prodotto scalare:

$$\begin{aligned} < f, g > &= \int_0^\infty f(t)g(t)dt \\ \|f\|_2 &= < f, f >^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e quindi L_2 è uno spazio di Hilbert (spazio lineare normato completo con prodotto scalare).

Le definizioni di norma si possono estendere facilmente al caso di sistemi MIMO, con funzioni $f : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{V}$, dove $\mathcal{V}$ è un opportuno spazio n-dimensionale.

Sistemi passivi e dissipativi

Si consideri un sistema dinamico descritto nello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) & = & h(x(t)) \end{cases}$$

con $x \in L_{2e}^n(T)$, $y \in L_{2e}^m(T)$, $u \in L_{2e}^m(T)$.
Le funzioni f, g, h siano smooth in x, con $f(0) = 0$, $h(0) = 0$.

In generale, per lo studio della passività di un sistema dinamico è necessario definire:

$\Longrightarrow$ una funzione $w(u, y)$ dell'ingresso e dell'uscita detta *supply rate*, funzione che deve essere integrabile, cioè $\displaystyle\int_0^t w(u, y)dt < \infty$;
spesso si considera $w(u, y) = y^T u$;
formulazione più generale: $w(u, y) = y^T u + \delta u^T u + \epsilon y^T y$;

$\Longrightarrow$ una funzione $S(t) \geq 0$ (o $V(t) \geq 0$) continua e differenziabile detta *storage function*;

ed eventualmente

$\Longrightarrow$ una funzione $d(t) \geq 0$ detta *dissipation rate*.

Definizione

Sistema passivo

Un sistema con ingresso $u \in \mathbb{R}^n$ *ed uscita* $y \in \mathbb{R}^n$ è passivo *se, per ogni* u *e per ogni* $t \geq 0$ *esiste una costante* $\beta \leq 0$ *tale che:*

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq \beta \tag{2}$$

Inoltre, se si possono definire due costanti $\delta \geq 0, \quad \epsilon \geq 0$ *tali che*

$$\int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq \beta + \delta \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau + \epsilon \int_0^t y^T(\tau)y(\tau)d\tau \qquad \forall u, \quad \forall t \geq 0$$

allora il sistema è

- input strictly passive *(ISP)* *se* $\delta > 0$
- output strictly passive *(OSP)* *se* $\epsilon > 0$
- very strictly passive *(VSP)* *se* $\delta > 0, \epsilon > 0$

NB: $\beta \leq 0$ poichè la (2) deve valere anche per $u = 0$.

Teorema

Se esiste una funzione $V(t) \geq 0$ *tale che*

$$V(t) - V(0) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \qquad \forall u,\ \forall t \geq 0,\ \forall V(0)$$

allora il sistema con ingresso u ed uscita y è passivo.

Se $\exists\, \delta \geq 0, \epsilon \geq 0$ *tali che,* $\forall u,\ \forall t \geq 0$*:*

$$V(t) - V(0) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau - \delta \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau - \epsilon \int_0^t y^T(\tau)y(\tau)d\tau$$

allora il sistema è

- input strictly passive *(ISP)* *se* $\delta > 0$
- output strictly passive *(OSP)* *se* $\epsilon > 0$
- very strictly passive *(VSP)* *se* $\delta > 0$, $\epsilon > 0$

La definizione di passività può essere anche espressa in forma differenziale come:

$$\dot{V}(t) \leq y^T(t)u(t)$$

o, introducendo una funzione $d(t)$ tale che $\int_0^t d(\tau)d\tau \geq 0, \ \forall t \geq 0$

$$\dot{V}(t) \leq y^T(t)u(t) - d(t)$$

Analogamente:

1. Se esiste un $\delta \geq 0$ tale che

   $\dot{V}(t) \leq y^T(t)u(t) - \delta u^T(t)u(t) - d(t) \quad \Longrightarrow \quad$ il sistema è ISP

2. Se esiste un $\epsilon \geq 0$ tale che

   $\dot{V}(t) \leq y^T(t)u(t) - \epsilon y^T(t)y(t) - d(t) \quad \Longrightarrow \quad$ il sistema è OSP

3. Se esistono $\delta \geq 0, \ \epsilon \geq 0$ tali che

   $\dot{V}(t) \leq y^T(t)u(t - \delta u^T(t)u(t) - \epsilon y^T(t)y(t) - d(t) \quad \Longrightarrow \quad$ il sistema è VSP

Definizioni alternative

Definizione

Dissipatività

Un sistema con ingresso u ed uscita y è dissipativo *rispetto alla funzione* supply rate $w(u, y)$ *sse esiste una* storage function $V \geq 0$ *tale che*

$$V(t) \leq V(0) + \int_0^t w(u(\tau), y(\tau))d\tau \qquad \forall u, \ \ \forall t \geq 0, \ \ \forall x_0$$

Definizione

Passività

Un sistema con ingresso u ed uscita y è passivo *se è dissipativo rispetto alla funzione* supply rate

$$w(u, y) = y^T u$$

Definizione

Passività ISP

Un sistema con ingresso u ed uscita y è strettamente passivo sull'ingresso (ISP) *se è dissipativo rispetto alla funzione* supply rate

$$w(u, y) = y^T u - \delta u^T u, \qquad \mathit{con} \qquad \delta > 0$$

Definizione

Passività OSP

Un sistema con ingresso u ed uscita y è strettamente passivo sull'uscita (OSP) *se è dissipativo rispetto alla funzione* supply rate

$$w(u, y) = y^T u - \epsilon y^T y, \qquad \mathit{con} \qquad \epsilon > 0$$

La passività la stabilità alla Lyapunov sono strettamente collegate.

Lemma

Si consideri un sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{cases}$$

e si supponga che sia strettamente passivo. Se la storage function $V(x)$ è definita positiva, radialmente illimitata e decrescente, allora, per $u \equiv 0$, il punto di equilibrio $x = 0$ del sistema è globalmente uniformemente (asintoticamente) stabile.

Dim. Considerando $u \equiv 0$, nel caso di stretta passività si ottiene

$$\dot{V}(x(t)) < 0$$

e quindi il punto $x = 0$ è globalmente uniformemente (asintoticamente) stabile. Analogamente si procede nel caso di passività semplice.

Una proprietà interessante della passività è che può essere facilmente applicata all'analisi delle proprietà di stabilità di sistemi composti.

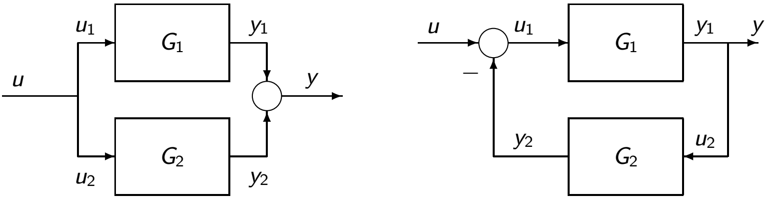
$\Longrightarrow$ *Una combinazione di sistemi passivi risulta essere un sistema passivo, e se uno dei sistemi è strettamente passivo (dissipativo), allora l'insieme risulta asintoticamente stabile.*

Inoltre, se un sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ è passivo, una trasformazione lineare data da $Au \rightarrow A^{-T}y$ fornisce un sistema passivo.

Più in generale, la passività di un sistema non è modificata da una trasformazione espressa da una matrice A ortonormale (i.e. una matrice tale che $A^T A = I$).

Interconnessione di sistemi passivi

Un risultato molto importante della passività è che l'interconnessione di sistemi passivi è ancora un sistema passivo.



Interconnessione di sistemi passivi

Siano dati due sistemi G_1 e G_2, con ingressi ed uscite $u_1, y_1,\ u_2, y_2$ rispettivamente.

Si supponga che:

1. esistano due funzioni continue e differenziabili $V_1(t) \geq 0,\ V_2(t) \geq 0$
2. esistano due funzioni $d_1(t)$ e $d_2(t)$ tali che

$$\int_0^t d_1(\tau)d\tau \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_0^t d_2(\tau)d\tau \geq 0, \quad \forall t \geq 0$$

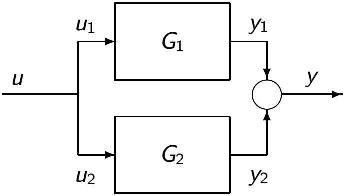
3. esistano delle costanti $\delta_1 \geq 0,\ \delta_2 \geq 0,\ \epsilon_1 \geq 0,\ \epsilon_2 \geq 0$ tali che

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= y_1^T(t)u_1(t) - \delta_1 u_1^2(t) - \epsilon y_1^2(t) - d_1(t) \\
\dot{V}_2(t) &= y_2^T(t)u_2(t) - \delta_2 u_2^2(t) - \epsilon y_2^2(t) - d_2(t)
\end{aligned}$$

cioè i sistemi sono passivi (e ISP, OSP o VSP se le opportune costanti sono > 0)

Interconnessione di sistemi passivi

Sistemi in parallelo



$$\Longrightarrow \quad u_1 = u_2 = u, \quad y = y_1 + y_2$$

$$\Longrightarrow \; y^T u = (y_1 + y_2)^T u = y_1^T u_1 + y_2^T u_2$$

allora

$\exists \; V = V_1 + V_2 \geq 0, \quad$ una $\delta = \delta_1 + \delta_2, \quad$ un $d_p = d_1 + d_2 + \epsilon_1 y_1^2 + \epsilon_2 y_2^2$

tale che

$$\int_0^t d_p(\tau) d\tau \geq 0, \quad \forall t \geq 0$$

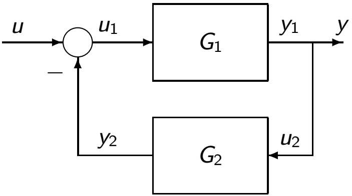
e

$$\dot{V}(t) = y^T(t) u(t) - \delta u^2(t) - d_p(t)$$

cioè il sistema è passivo, e anche ISP se $\delta_1 > 0$ o $\delta_2 > 0$.

Interconnessione di sistemi passivi

Sistemi in retroazione



$$\implies \quad y_1 = u_2 = y, \; u_1 = u - y_2,$$
$$\implies y^T u = y_1^T(u_1 + y_2) = y_1^T u_1 + u_2^T y_2$$

allora

$\exists\ V = V_1 + V_2 \geq 0$, un $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \delta_2$, un $d_r = d_1 + d_2 + \delta_1 u_1^2$
tale che

$$\int_0^t d_r(\tau) d\tau \geq 0, \quad \forall t \geq 0$$

e

$$\dot{V}(t) = y^T(t)u(t) - \epsilon y^2(t) - d_r(t)$$

cioè il sistema è passivo, e anche OSP se $\epsilon_1 > 0$ o $\epsilon_2 > 0$ o $\delta_2 > 0$.