

Controlli Automatici L-B - Cesena

Compito del 17 giugno 2002 - Domande teoriche

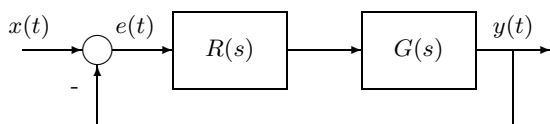
Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti hanno più risposte corrette, e si considerano superati quando queste sono segnate tutte.

1. Il polo necessario per la realizzabilità fisica di un PID si colloca:
 - in alta frequenza per ridurre la banda del sistema
 - al di fuori della banda di interesse per il controllo
 - a frequenza non troppo elevata per attenuare l'effetto dei disturbi
2. È possibile ottenere la Z-trasformata $X(z)$ di un segnale campionato a partire dalla relativa trasformata di Laplace $X^*(s)$ mediante la posizione
 - $z \rightarrow e^{sT}$ ($s \rightarrow \frac{1}{T} \ln z$)
 - $z \rightarrow e^{-sT}$ ($s \rightarrow \frac{1}{T} \ln z^{-1}$)
 - $z \rightarrow \frac{1}{T} \ln s$ ($s \rightarrow e^{zT}$)
3. Sia dato un sistema $G(s)$ con due poli reali instabili e uno zero reale stabile. Posto $G(s)$ in retroazione con un controllore $C(s) = K > 0$, si ottiene un sistema:
 - sempre instabile
 - stabile, per K maggiore di un certo valore K_{min}
 - che ha sempre poli reali
4. Il progetto analitico per cancellazione poli-zeri consente di ottenere una funzione di trasferimento di anello arbitraria
 - per qualunque tipo di sistema
 - per sistemi a fase minima senza singolarità nell'origine
 - per sistemi stabili con zeri positivi
5. Il periodo di campionamento T in relazione al progetto di un regolatore digitale per il plant $G(s)$ in cui la costante di tempo dominante è τ_{dom} :
 - si assume usualmente pari a $\tau_{dom}/5$
 - si assume usualmente pari a $5\tau_{dom}$
 - deve essere $T > \pi/\omega_c$, dove ω_c è la massima pulsazione del sistema
6. Nel caso in cui il plant sia scomponibile in due sottosistemi in serie $G(s) = G_1(s)G_2(s)$, il progetto di due regolatori in cascata
 - è conveniente quando le dinamiche di $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono simili
 - è conveniente quando la dinamica di $G_1(s)$ è più rapida di quella di $G_2(s)$
 - è fattibile quando l'uscita di $G_1(s)$ è accessibile alla misura
7. L'azione derivativa in un regolatore PID (in forma ideale)
 - aumenta la sua sensitività ai disturbi
 - ha l'effetto benefico di anticipare la fase in un dato range di frequenze
 - viene collocata preferibilmente sul ramo diretto
8. Se il diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento con due poli instabili compie due rotazioni intorno al punto critico, il sistema retroazionato:
 - è stabile se le rotazioni sono in senso orario
 - è stabile se le rotazioni sono in senso antiorario
 - possiede quattro poli instabili se le rotazioni sono in senso antiorario
9. Il progetto di un regolatore PID con l'ausilio delle tabelle di Ziegler-Nichols in anello aperto:
 - richiede di individuare il valore del guadagno critico per il plant
 - richiede di approssimare il plant come un sistema del primo ordine con ritardo
 - è applicabile a plant che presentino risposte al gradino fortemente oscillatorie
10. Il baricentro σ_B del luogo delle radici
 - si calcola come $\sigma_B = \frac{1}{n} \sum_1^n p_i$
 - appartiene sempre all'asse reale
 - è indipendente da K per qualunque sistema

Controlli Automatici L-B - Cesena

Compito 17 giugno 2002 - Problemi

1. Si consideri lo schema a blocchi di figura.

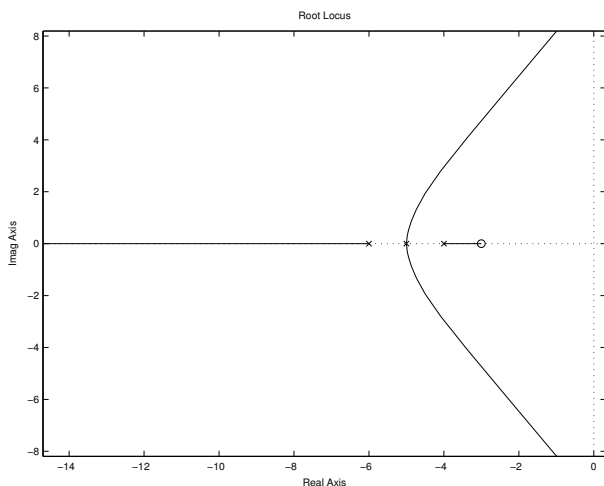


$$R(s) = K,$$

$$G(s) = \frac{s + 3}{(s + 4)(s + 5)^2(s + 6)}$$

a) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici al variare di $K > 0$, calcolando esattamente il baricentro ed il punto di incontro di eventuali asintoti

$$\sigma_B = \frac{1}{4}(-4 - 5 - 5 - 6) = -5, \quad \sigma_A = \frac{1}{3}(-4 - 5 - 5 - 6 + 3) = -5.67$$



b) Determinare per quali valori di K il sistema in retroazione è stabile

Equazione caratteristica del sistema: $s^4 + 20s^3 + 149s^2 + (490 + K)s + 3(200 + K) = 0$, pertanto la tabella di Routh risulta:

4	1	149	$3(200 + K)$
3	20	$490 + K$	
2	$2490 - K$	$60(200 + K)$	
1	$\frac{-K^2 + 800K + 980100}{2490 - K}$		
0	$200 + K$		

Imponendo che tutti i termini della prima colonna siano positivi, si ottiene: $-200 < K < 1467.8$

c) Detto K^* il massimo valore di K determinato al punto precedente, calcolare l'eventuale pulsazione di oscillazione ω^* corrispondente alla semplice stabilità del sistema

$$\omega^* = \sqrt{\frac{490 + K^*}{20}} = 9.96 \text{ rad/sec}$$

2. Con riferimento allo schema dell'esercizio 1, si consideri $R(s) = \frac{2}{s(2 + s)}$ e si assuma un periodo di campionamento $T = 0.4 \text{ sec}$

a) Si discretizzi $R(s)$ utilizzando il metodo delle differenze all'indietro.

Operando la sostituzione $z = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$ si ottiene:

$$R(z) = \frac{2}{2.5(1 - z^{-1})(4.5 - 2.5z^{-1})} = \frac{0.8}{4.5 - 7z^{-1} + 2.5z^{-2}} = \frac{0.18}{1 - 1.56z^{-1} + 0.56z^{-2}}$$

b) Si calcoli l'equazione alle differenze relativa alla legge di controllo ottenuta

$$u_k = 1.56u_{k-1} - 0.56u_{k-2} + 0.18e_k$$

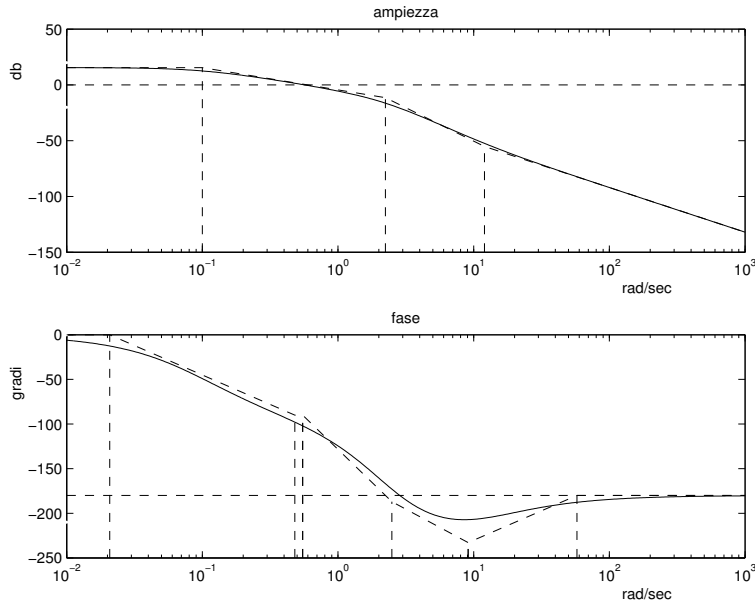
3. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici della funzione di trasferimento

$$G(s) = 0.2 \frac{s + 12}{(s + 0.1)(s^2 + 4s + 5)}$$

fornendo una stima del margine di fase M_F e del margine di ampiezza M_A .

Supponendo di voler controllare con un regolatore discreto questo impianto, si scelga un adeguato periodo di campionamento T , svolgendo le considerazioni del caso.

$$M_F \simeq 68.5^\circ, \quad M_A \simeq 16 = 24 \text{ dB}$$



Assumo T pari a circa un quinto della costante di tempo dei poli complessi coniugati, utilizzandoli come stima per la banda del sistema retroazionato: $T \simeq \frac{1}{5\delta\omega_n} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ sec}$; la bontà di tale scelta deve essere verificata a posteriori.

4. Si tracci il diagramma polare della seguente funzione di anello (determinandone esattamente le caratteristiche salienti) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si dica se il sistema retroazionato è stabile oppure no (in tal caso indicare quanti poli instabili sono presenti):

$$L(s) = \frac{1000}{s(s+5)(s+10)}$$

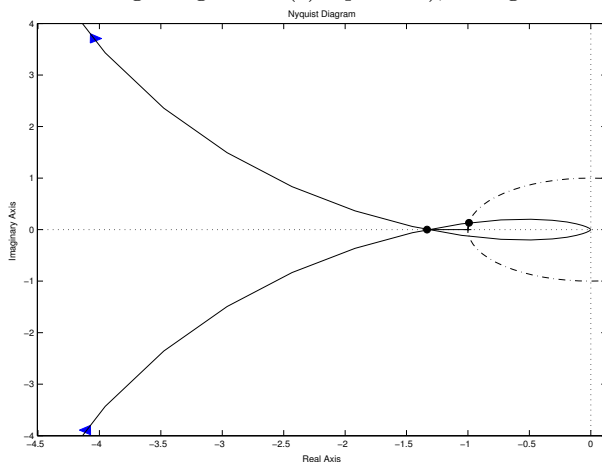
Si ha che:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{1000}{\omega} \implies \begin{cases} |L(j0^+)| = \infty \\ \arg L(j0^+) = -\pi/2 \end{cases}$$

e che:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1000}{\omega^3} \implies \begin{cases} |L(j\infty)| = 0 \\ \arg L(j\infty) = -3\pi/2 \end{cases}$$

Il diagramma possiede un asintoto verticale in $\sigma_a = 20 * (0 - 1/5 - 1/10) = -6$, poiché tale valore è negativo (e la costante di guadagno di $L(s)$ è positiva), il diagramma "parte" in senso orario.

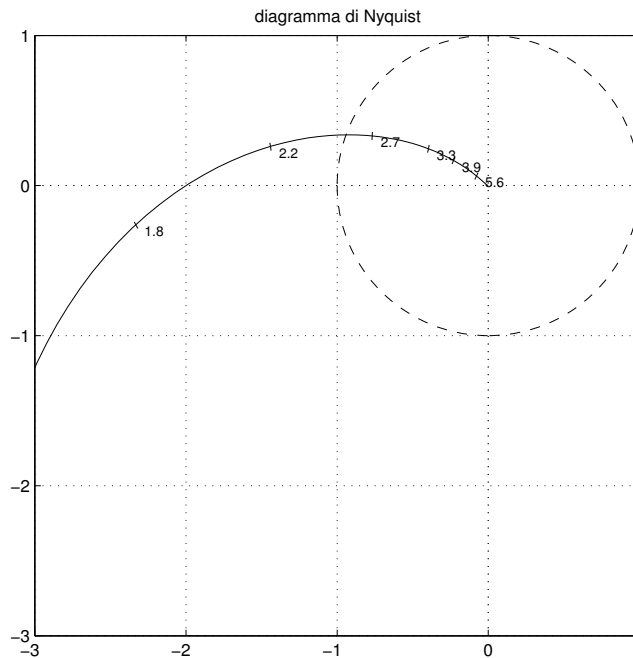


La determinazione dell'intersezione con l'asse reale può essere svolta applicando il criterio di Routh. Equazione caratteristica: $s^3 + 15s^2 + 50s + 1000K = 0$

$$\left. \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 50 \\ 2 & 15 & 1000K \\ 1 & 750 - 1000K & \\ 0 & 1000K & \end{array} \right\} K^* = 0.75 \implies \sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -1.33$$

INSTABILE, $n_p - R = 0 - (-2) = 2$ poli instabili nel sistema retroazionato.

5. Un sistema dinamico ha il diagramma di Nyquist rappresentato in figura.



a) Utilizzando le formule di inversione:

$$\tau = \frac{M - \cos \phi}{\omega \sin \phi}, \quad \alpha = \frac{M \cos \phi - 1}{M(M - \cos \phi)}$$

determinare una rete anticipatrice in modo da ottenere un margine di fase $M_F = 20^\circ$ (suggerimento: si consideri il punto di pulsazione $\omega = 3.3 \text{ rad/sec}$) Si ha che: $\omega_A = 3.3 \quad G(j\omega_A) = -0.4 + j0.25$, da cui:

$$|G(j\omega_A)| = \sqrt{0.4^2 + 0.25^2} = 0.4717 \quad \phi_A = -180 + \arctan -0.25/0.4 = 212^\circ$$

da cui:

$$M = 1/|G(j\omega_A)| = 2.12 \quad \phi = -160 - (-180 + \arctan -0.25/0.4) = 52^\circ$$

e: $\tau = 0.5785, \alpha = 0.0956$

b) Assumendo che la pulsazione alla quale il diagramma incrocia l'asse reale sia $\omega^* = 1.94 \text{ rad/sec}$, si progetti un regolatore PID che garantisca $M_A = 5$. (suggerimento: si imponga che

$$\frac{1}{j\omega^*T_i} + j\omega^*T_d = 0$$

e che gli zeri siano reali e coincidenti).

Zeri reali coincidenti $\Rightarrow T_i = 4T_d$, l'intersezione con l'asse reale avviene nel punto di ascissa -2, dunque:

$$K_p = \frac{1}{2} \frac{1}{M_A} = \frac{1}{10}$$

Imponendo che alla pulsazione ω^* il PID non ritardi né anticipi, si ottiene che:

$$1 - 4\omega^{*2}T_d = 0 \implies T_d = 0.2577, \quad T_i = 1.0308$$

c) Nel caso in cui il sistema illustrato in figura sia di tipo 1, si confrontino le prestazioni a regime con la rete correttiva e con il regolatore PID.

PID errore a regime nullo anche per ingresso a rampa, rete correttiva annulla l'errore solo per ingresso a gradino

Controlli Automatici L-B - Cesena

Compito del 17 giugno 2002 - Domande teoriche

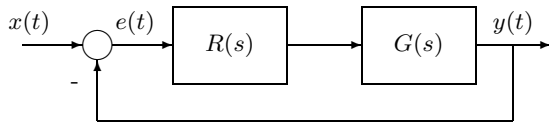
Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti hanno più risposte corrette, e si considerano superati quando queste sono segnate tutte.

1. L'azione derivativa in un regolatore PID (in forma ideale)
 - viene collocata preferibilmente sul ramo diretto
 - ha l'effetto benefico di anticipare la fase in un dato range di frequenze
 - aumenta la sua sensitività ai disturbi
2. Sia dato un sistema $G(s)$ con due poli reali instabili e uno zero reale stabile. Posto $G(s)$ in retroazione con un controllore $C(s) = K > 0$, si ottiene un sistema:
 - stabile, per K maggiore di un certo valore K_{min}
 - che ha sempre poli reali
 - sempre instabile
3. Il polo necessario per la realizzabilità fisica di un PID si colloca:
 - a frequenza non troppo elevata per attenuare l'effetto dei disturbi
 - in alta frequenza per ridurre la banda del sistema
 - al di fuori della banda di interesse per il controllo
4. Il baricentro σ_B del luogo delle radici
 - si calcola come $\sigma_B = \frac{1}{n} \sum_1^n p_i$
 - è indipendente da K per qualunque sistema
 - appartiene sempre all'asse reale
5. Nel caso in cui il plant sia scomponibile in due sottosistemi in serie $G(s) = G_1(s)G_2(s)$, il progetto di due regolatori in cascata
 - è conveniente quando la dinamica di $G_1(s)$ è più rapida di quella di $G_2(s)$
 - è conveniente quando le dinamiche di $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono simili
 - è fattibile quando l'uscita di $G_1(s)$ è accessibile alla misura
6. Il progetto di un regolatore PID con l'ausilio delle tabelle di Ziegler-Nichols in anello aperto:
 - richiede di approssimare il plant come un sistema del primo ordine con ritardo
 - è applicabile a plant che presentino risposte al gradino fortemente oscillatorie
 - richiede di individuare il valore del guadagno critico per il plant
7. Se il diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento con due poli instabili compie due rotazioni intorno al punto critico, il sistema retroazionato:
 - possiede quattro poli instabili se le rotazioni sono in senso antiorario
 - è stabile se le rotazioni sono in senso orario
 - è stabile se le rotazioni sono in senso antiorario
8. Il periodo di campionamento T in relazione al progetto di un regolatore digitale per il plant $G(s)$ in cui la costante di tempo dominante è τ_{dom} :
 - deve essere $T > \pi/\omega_c$, dove ω_c è la massima pulsazione del sistema
 - si assume usualmente pari a $5\tau_{dom}$
 - si assume usualmente pari a $\tau_{dom}/5$
9. È possibile ottenere la Z-trasformata $X(z)$ di un segnale campionato a partire dalla relativa trasformata di Laplace $X^*(s)$ mediante la posizione
 - $z \rightarrow \frac{1}{T} \ln s \quad (s \rightarrow e^{zT})$
 - $z \rightarrow e^{-sT} \quad (s \rightarrow \frac{1}{T} \ln z^{-1})$
 - $z \rightarrow e^{sT} \quad (s \rightarrow \frac{1}{T} \ln z)$
10. Il progetto analitico per cancellazione poli-zero consente di ottenere una funzione di trasferimento di anello arbitraria
 - per sistemi stabili con zeri positivi
 - per qualunque tipo di sistema
 - per sistemi a fase minima senza singolarità nell'origine

Controlli Automatici L-B - Cesena

Compito 17 giugno 2002 - Problemi

1. Si consideri lo schema a blocchi di figura.

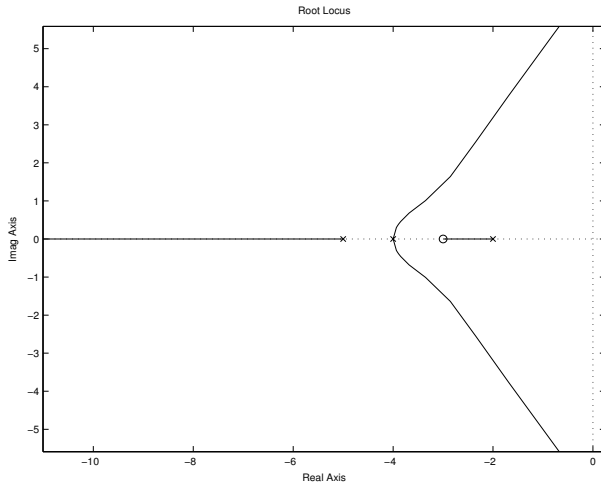


$$R(s) = K,$$

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)^2(s+5)}$$

a) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici al variare di $K > 0$, calcolando esattamente il baricentro ed il punto di incontro di eventuali asintoti

$$\sigma_B = \frac{1}{4}(-2 - 4 - 4 - 5) = -3.75, \quad \sigma_A = \frac{1}{3}(-2 - 4 - 4 - 5 + 3) = -4$$



b) Determinare per quali valori di K il sistema in retroazione è stabile

Equazione caratteristica del sistema: $s^4 + 15s^3 + 82s^2 + (192 + K)s + (160 + 3K) = 0$, pertanto la tabella di Routh risulta:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 82 & 160 + 3K \\ 3 & 15 & 192 + K & \\ 2 & 1038 - K & 15(160 + 3K) & \\ 1 & \frac{-K^2 + 171K + 163296}{1038 - K} & & \\ 0 & 160 + 3K & & \end{array}$$

Imponendo che tutti i termini della prima colonna siano positivi, si ottiene: $-53.33 < K < 498.54$

c) Detto K^* il massimo valore di K determinato al punto precedente, calcolare l'eventuale pulsazione di oscillazione ω^* corrispondente alla semplice stabilità del sistema

$$\omega^* = \sqrt{\frac{192 + K^*}{15}} = 6.7850 \text{ rad/sec}$$

2. Con riferimento allo schema dell'esercizio 1, si consideri $R(s) = \frac{5s}{(5+s)}$ e si assuma un periodo di campionamento $T = 0.1 \text{ sec}$.

a) Si discretizzi $R(s)$ utilizzando il metodo della trasformazione bilineare.

Operando la sostituzione $z = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ si ottiene:

$$R(z) = \frac{20 - 20z^{-1}}{4 - 4z^{-1} + 1 + z^{-1}} = 4 \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$$

b) Si calcoli l'equazione alle differenze relativa alla legge di controllo ottenuta.

$$u_k = 0.6u_{k-1} + 4e_k - 4e_{k-1}$$

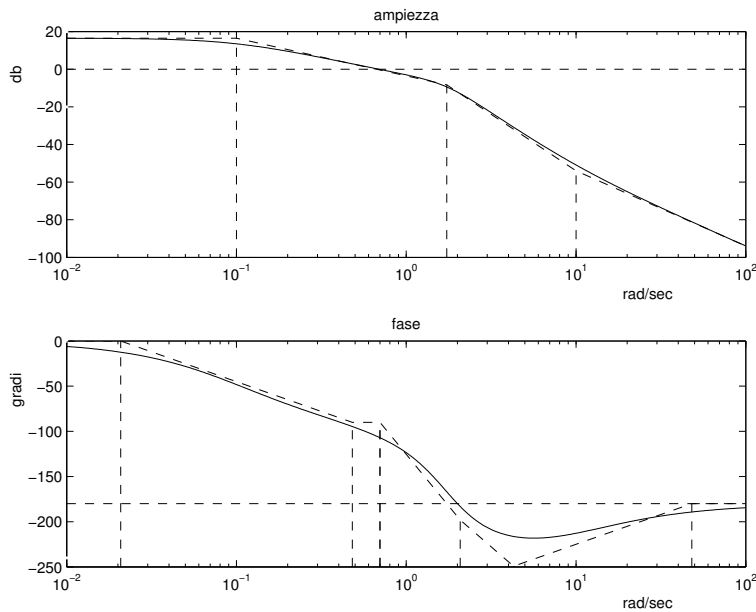
3. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici della funzione di trasferimento

$$G(s) = 0.2 \frac{s+10}{(s+0.1)(s^2+2s+3)}$$

fornendo una stima del margine di fase M_F e del margine di ampiezza M_A .

Supponendo di voler controllare con un regolatore discreto questo impianto, si scelga un adeguato periodo di campionamento T , svolgendo le considerazioni del caso.

$$M_F \simeq 73.5^\circ, \quad M_A \simeq 12.2dB = 4$$



Assumo T pari a circa un quinto della costante di tempo dei poli complessi coniugati, utilizzandoli come stima per la banda del sistema retroazionato: $T \simeq \frac{1}{5\delta\omega_n} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ sec}$; la bontà di tale scelta deve essere verificata a posteriori.

4. Si tracci il diagramma polare della seguente funzione di anello (determinandone esattamente le caratteristiche salienti) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si dica se il sistema retroazionato è stabile oppure no (in tal caso indicare quanti poli instabili sono presenti):

$$L(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

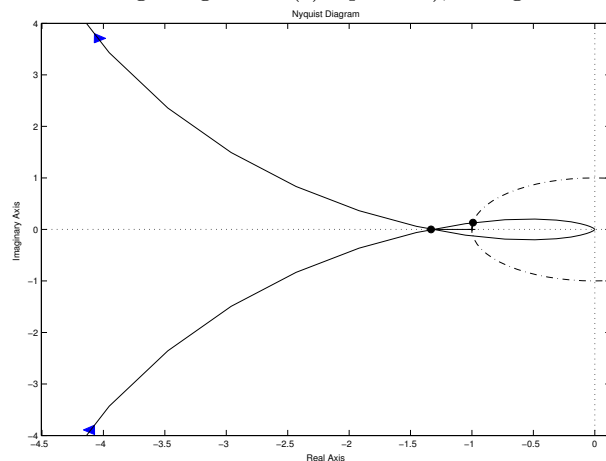
Si ha che:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{10}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} |L(j0^+)| = \infty \\ \arg L(j0^+) = -\pi/2 \end{cases}$$

e che:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{10}{\omega^3} \Rightarrow \begin{cases} |L(j\infty)| = 0 \\ \arg L(j\infty) = -3\pi/2 \end{cases}$$

Il diagramma possiede un asintoto verticale in $\sigma_a = 5 * (-1 - 1/2) = -7.5$, poiché tale valore è negativo (e la costante di guadagno di $L(s)$ è positiva), il diagramma "parte" in senso orario.



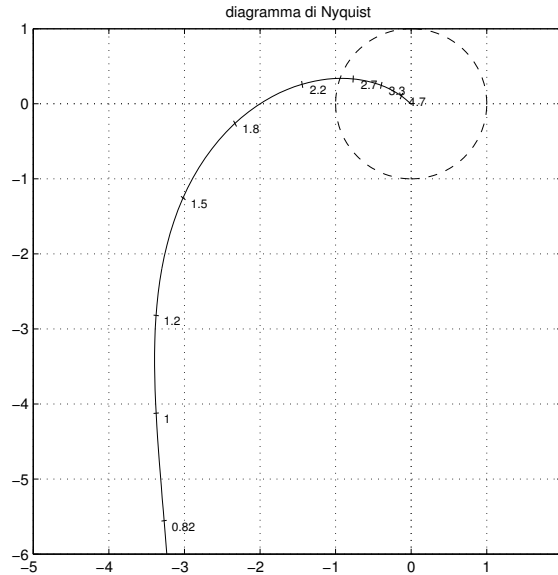
La determinazione dell'intersezione con l'asse reale può essere svolta applicando il criterio di Routh. Equazione

caratteristica: $s^3 + 3s^2 + 2s + 10K = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & 10K \\ 6 - 10K & \\ 10K & \end{array} \left. \right\} K^* = 0.6 \implies \sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -1.667$$

INSTABILE, $n_p - R = 0 - (-2) = 2$ poli instabili nel sistema retroazionato.

5. Un sistema dinamico ha il diagramma di Nyquist rappresentato in figura.



a) Utilizzando le formule di inversione:

$$\tau = \frac{M \cos \phi - 1}{M \omega \sin \phi}, \quad \alpha = \frac{M(M - \cos \phi)}{M \cos \phi - 1}$$

determinare una rete ritardatrice in modo da ottenere un margine di fase $M_F = 50^\circ$ (suggerimento: si consideri il punto di pulsazione $\omega = 0.82 \text{ rad/sec}$) Si ha che: $\omega_A = 0.82 \quad G(j\omega_A) = -3.3 - j5.5$, da cui:

$$|G(j\omega_A)| = \sqrt{3.3^2 + 5.5^2} \quad \phi_A = -180 + \arctan 5.5/3.3$$

da cui:

$$M = 1/|G(j\omega_A)| = 0.1559 \quad \phi = -130 - (-180 + \arctan 5.5/3.3) = -9^\circ$$

e: $\tau = 42.13, \alpha = 0.1533$

b) Assumendo che la pulsazione alla quale il diagramma incrocia l'asse reale sia $\omega^* = 1.94 \text{ rad/sec}$, si progetti un regolatore PID che garantisca $M_F = 5$. (suggerimento: si imponga che

$$\omega^* T_d - \frac{1}{\omega^* T_i} = \tan(M_F), \quad K_p = M_A \cos(M_F)$$

con M_A margine di ampiezza del sistema non compensato, e che gli zeri siano reali e coincidenti).

Si ha che $M_A = 1/2$, da cui: $K_p = 0.5 * \cos(5^\circ) = 0.4981$, imponendo che gli zeri siano reali e coincidenti si ottiene: $T_i = 4T_d$ e quindi:

$$4\omega^{*2} T_d - 4\omega^* T_d \tan(M_F) - 1 = 0 \implies T_d = 0.2813, \quad T_i = 1.1252$$

c) Nel caso in cui il sistema illustrato in figura sia di tipo 1, si confrontino le prestazioni a regime con la rete correttiva e con il regolatore PID.

PID errore a regime nullo anche alla rampa, rete correttiva solo al gradino