Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici L-B - Cesena

Compito del 25 giugno 2003 - Domande teoriche

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti hanno più risposte corrette, e si considerano superati quando queste sono segnate tutte.

1. La funzione di trasferimento del ricostruttore di ordine 0 è:
   - ○ $H_0(s) = \frac{1-e^{sT}}{s}$
   - ⊗ $H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$
   - ○ $H_0(s) = \frac{1+e^{sT}}{s}$
   - ○ $H_0(s) = \frac{1+e^{-sT}}{s}$
2. Il campionamento impulsivo con periodo T stabilisce un legame tra il piano s ed il piano z espresso da:
   - ○ $z = e^{-sT}$
   - ⊗ $z = e^{sT}$
   - ○ $s = e^{-zT}$
   - ○ $s = e^{zT}$
3. Il massimo ritardo di fase introdotto da una rete ritardatrice è:
   - ○ $\varphi = -\sin\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
   - ○ $\varphi = -\arcsin\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$
   - ⊗ $\varphi = -\arcsin\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
4. Una rete a ritardo e anticipo con pulsazione centrale $\omega_n = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$
   - ⊗ attenua per $\omega \in]0, \infty[$
   - ○ amplifica per $\omega \in]0, \infty[$
   - ⊗ attenua e sfasa per $\omega \in]0, \omega_n[$
5. Il criterio di Nyquist nella sua formulazione generale:
   - ⊗ è una condizione necessaria e sufficiente
   - ⊗ si applica a sistemi a fase non minima
   - ⊗ si applica a sistemi con ritardi finiti
   - ○ si applica a sistemi non lineari
6. Un sistema di tipo 1 in retroazione unitaria negativa ha guadagno statico:
   - ○ < 1
   - ⊗ $= 1$
   - ○ > 1
7. L'equazione alle differenze $z^{-2}Y(z) = -(kT)^2Y(z) + X(z)$ (con $X(z)$ e $Y(z)$ segnali di ingresso e uscita rispettivamente) è
   - ○ stazionaria
   - ⊗ non stazionaria
   - ⊗ lineare
8. Sia dato un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile, con grado relativo pari a 3 e posto in retroazione unitaria con un guadagno $K > 0$. Con riferimento al luogo delle radici, è possibile affermare che il sistema retroazionato:
   - ○ è stabile per valori di K sufficientemente elevati
   - ⊗ è instabile per valori di K sufficientemente elevati
   - ⊗ è stabile per valori di K sufficientemente piccoli
9. Il centro degli asintoti σ_a nella costruzione del luogo delle radici di un sistema con m zeri ed n poli si determina come:
   - ⊗ $\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$
   - ⊗ $\sigma_a = \frac{1}{m-n}\left(\sum_{i=1}^{m} z_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$
   - ○ $\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{m} z_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$
   - ○ $\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$
10. Il sistema dinamico tempo-discreto descritto dalla funzione di trasferimento $G(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ è:
    - ○ asintoticamente stabile
    - ⊗ semplicemente stabile
    - ○ instabile

Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici L-B - Cesena

Compito 25 giugno 2003 - Problemi

1. Data la funzione di anello

$$L(s) = 100\frac{s+10}{s(s^2+6s+25)}$$

a) se ne tracci il diagramma polare, determinando con esattezza l'ascissa di eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale;

SOLUZIONE:

$L(s)$ è di tipo 1, quindi possiede un asintoto verticale. La fase iniziale è $-\frac{\pi}{2}$ mentre quella finale risulta $-\pi$; la variazione complessiva della fase è di $-\frac{\pi}{2}$.

$$\Delta_a = \sum \tau_z - \sum \tau_p = \frac{1}{10} - \frac{6}{25} = -\frac{7}{50} < 0 \text{ senso antiorario}$$

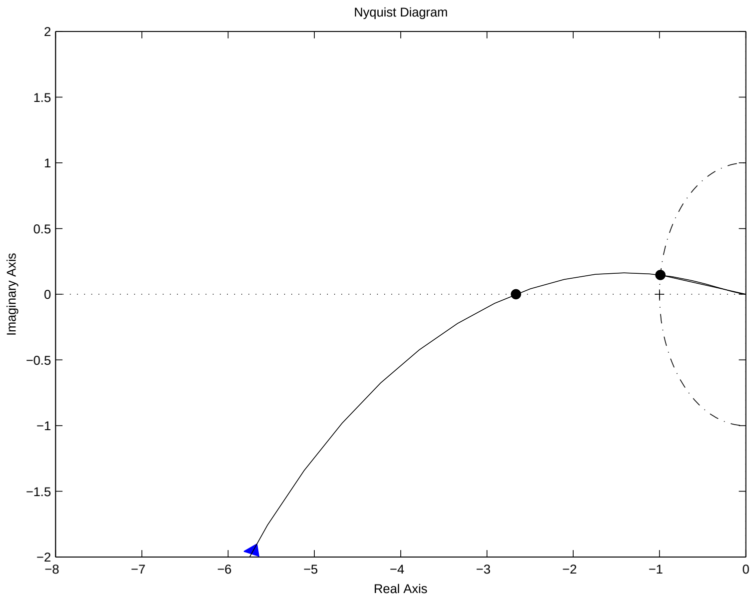
$$\sigma_a = 100\frac{10}{25}\Delta_a = -\frac{28}{5} \simeq -5.6$$

l'ascissa di intersezione con l'asse reale si determina con il criterio di Routh:

$$s^3 + 6s^2 + 25s + 100k(s+10) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 25(1+4k) \\ 2 & 6 & 1000k \\ 1 & 150(1+4k) - 1000k & \\ 0 & 1000k & \end{array}$$

$$k^* = \frac{3}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma^* = -\frac{1}{k^*} = -\frac{8}{3}$$



b) si calcoli con esattezza il margine di ampiezza e lo si riporti sul diagramma insieme al margine di fase;

SOLUZIONE:

$$M_A = \frac{1}{|\sigma^*|} = 0.3570$$

anche il margine di fase è negativo

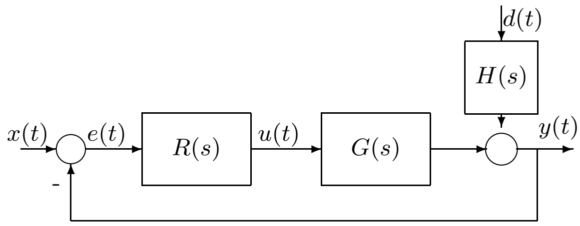
c) si ottenga dal diagramma tracciato il diagramma completo e, mediante il criterio di Nyquist, si dica se il sistema retroazionato è stabile o meno. In quest'ultimo caso, quanti poli instabili ha il sistema retroazionato?

SOLUZIONE:

il diagramma completo si ottiene ribaltando il diagramma polare intorno all'asse reale e congiungendo i rami all'infinito con una semicirconferenza percorsa in senso orario

$$n_p - R = 0 - (-2) = 2 \text{ poli instabili nel sistema retroazionato}$$

2. Si consideri lo schema a blocchi di figura.



a) Considerando gli ingressi $x(t) = 2h(t); d(t) = 3h(t)$ (con $h(t)$ gradino unitario), determinare il valore a regime dell'errore $e(t)$ in funzione di K per le seguenti funzioni di trasferimento:

$$R(s) = K > 0, \quad H(s) = \frac{5}{1+5s}, \quad G(s) = \frac{s^2+18s+49}{s^3+25s^2+8s+70}$$

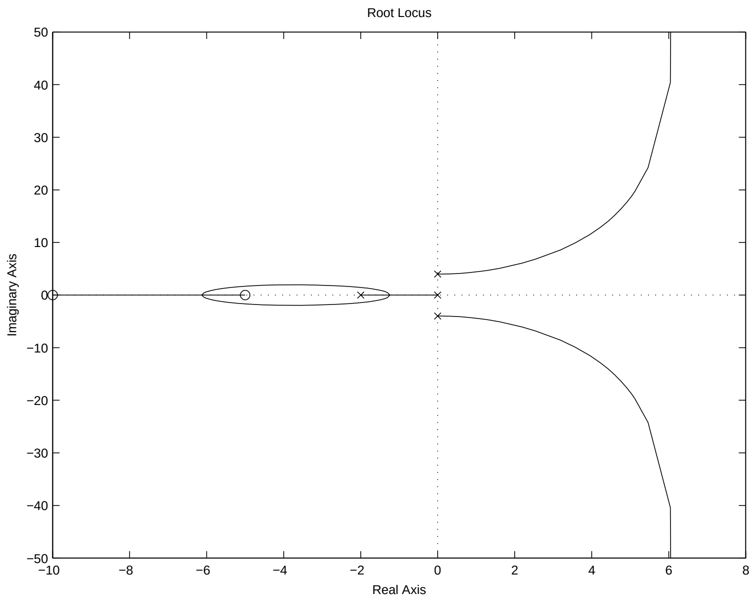
SOLUZIONE:

$$e_\infty = \frac{2}{1+KG(0)} - \frac{3H(0)}{1+KG(0)} = \frac{20-150}{10+7K}$$

b) Si tracci il luogo delle radici, calcolandone esattamente i punti salienti, per:

$$R(s) = K > 0, \quad H(s) = 0, \quad G(s) = \frac{(s+5)(s+10)}{s(s+2)(s^2+16)}$$

SOLUZIONE:



$$\sigma_b = -\frac{2}{4} = -0.5 \qquad \sigma_a = \frac{1}{2}(-2+5+10) = 6.5$$

il sistema retroazionato è instabile per qualunque valore di $K > 0$

3. Con riferimento alla figura precedente, si assuma $R(s) = KR_1(s)$, ove $R_1(s)$ è una rete anticipatrice a guadagno unitario.

   a) Dato il plant

   $$G(s) = 16\frac{s+10}{(s+1)(s^2+8s+16)}$$

   si impieghino tecniche di cancellazione polo/zero per determinare $R_1(s)$ in modo che il sistema retroazionato sia stabile per qualunque valore di K;

   SOLUZIONE:
   per prima cosa si cancella lo zero di $G(s)$ con il polo della rete:

   $$\tau_p = \frac{1}{10}$$

   imponendo che il punto di incontro degli asintoti (verticali) sia l'origine, si ottiene:

   $$\frac{1}{2}(-8-1-z) = 0 \qquad \Rightarrow z = -9 \qquad \Rightarrow \tau_z = \frac{1}{9}$$

   b) Interpretare in termini frequenziali il risultato ottenuto al punto precedente (*Suggerimento: si valuti il margine di fase del sistema, eventualmente tracciando in modo qualitativo i diagrammi di Bode di fase e ampiezza per un fissato valore di K*).

SOLUZIONE:
In termini frequenziali, spostare lo zero a pulsazioni più basse significa sfruttarne l'anticipo di fase per migliorare M_F. Il fatto che il sistema retroazionato risulti stabile per qualunque valore di K significa in particolare che la fase non scenderà mai al di sotto di -180^0 e quindi, indipendentemente dal guadagno e dalla pulsazione di incrocio, risulta $M_F > 0$ (per sistemi a fase minima, come $G(s)$ e $L(s)$, tale condizione è sufficiente per la stabilità).

c) Supponendo che il sistema $L(s) = R(s)G(s)$ abbia pulsazione di incrocio $\omega_c = 3$ rad/sec, si scelga in maniera opportuna il periodo di campionamento T per l'implementazione digitale di $R(s)$;
SOLUZIONE:
Detta ω_b la larghezza di banda del sistema retroazionato, si ha che:

$$\omega_b \simeq \omega_c \qquad \Rightarrow \qquad \omega_s = 20\omega_b = 20\omega_c$$

4. Dato il regolatore tempo-continuo $R(s) = 5\dfrac{(s+4)}{(s+20)}$:

a) calcolare il regolatore tempo-discreto $R(z)$ utilizzando il metodo della trasformazione bilineare e tempo di campionamento $T = 0.2$ sec. Si commenti la stabilità di $R(z)$.
SOLUZIONE:

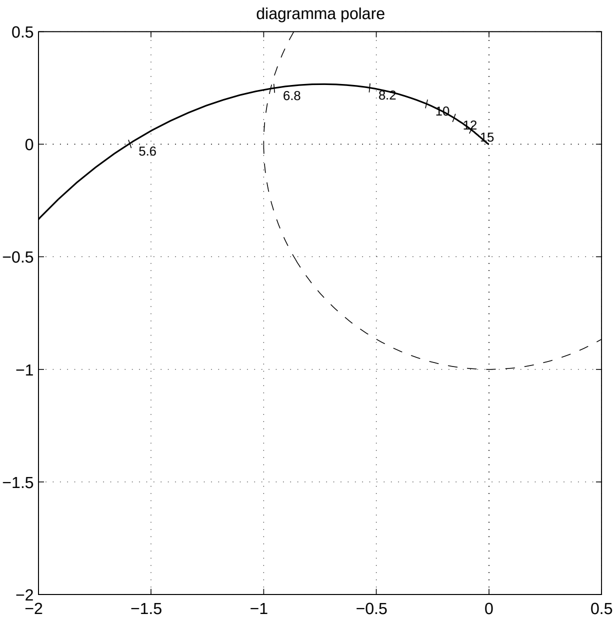
$$R(z) = 5\frac{10\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 4}{10\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 20} = \frac{2.33 - z^{-1}}{1 + 0.33z^{-1}}$$

La trasformazione bilineare mappa sempre $R(s)$ stabili in $R(z)$ stabili.

b) scrivere l'equazione alle differenze associata a $R(z)$.
SOLUZIONE:

$$u_k = 2.33e_k - e_{k-1} - 0.33u_{k-1}$$

5. Un sistema dinamico ha il diagramma polare rappresentato in figura.



a) Utilizzando le formule di inversione:

$$\tau = \frac{M - \cos\phi}{\omega \sin\phi}, \qquad \alpha = \frac{M\cos\phi - 1}{M(M - \cos\phi)}$$

determinare una rete anticipatrice in modo da ottenere un margine di fase $M_F = 20^o$ (suggerimento: si consideri il punto di pulsazione $\omega = 8.2\ rad/sec$)
SOLUZIONE:

$$A \equiv -0.533 + j0.267 \qquad |A| = 0.5961 \qquad \phi_A = -206.5$$

$$|B| = 1 \qquad \phi_B = -160$$

$$M = \frac{|B|}{|A|} = 1.6775 \qquad \phi = \phi_B - \phi_A = 46.57$$

$$\tau = 0.1662 \qquad \alpha = 0.0923$$

b) Si progetti un regolatore PID che garantisca $M_A = 2$ alla pulsazione $\omega^* = 5.6$ rad/sec. (suggerimento: si imponga che

$$\frac{1}{j\omega^* T_i} + j\omega^* T_d = 0$$

e che gli zeri siano reali e coincidenti).
SOLUZIONE:

$$K_P = \frac{0.5}{1.5833}$$

$$1 - 125.44T_d^2 = 0 \Longrightarrow T_D = 0.0893, \ T_I = 0.3571$$