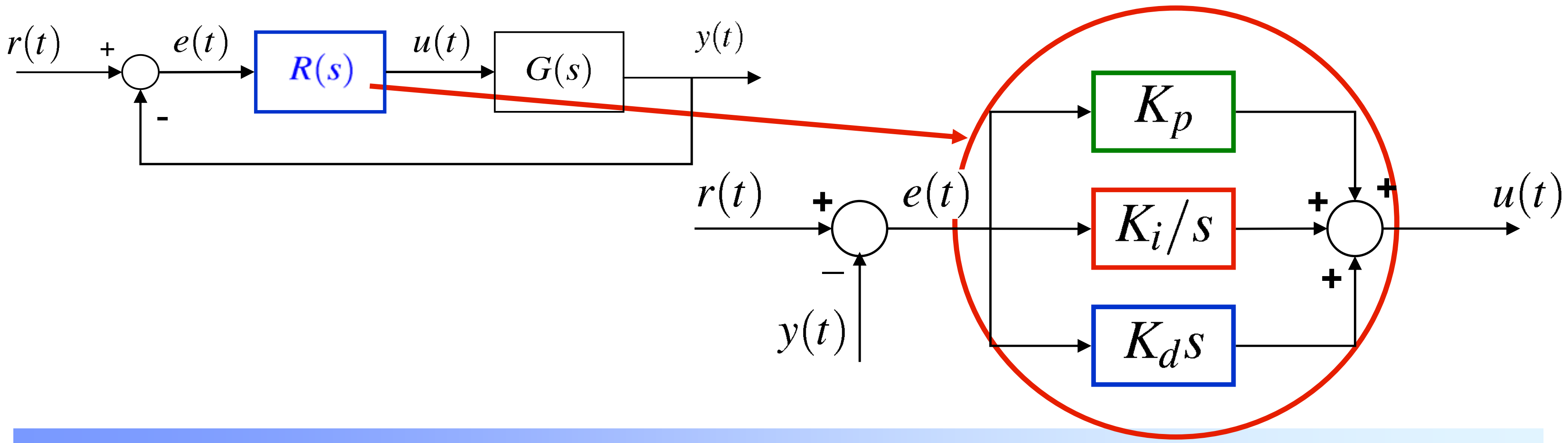
CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

INTRODUZIONE AL CONTROLLO DIGITALE

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

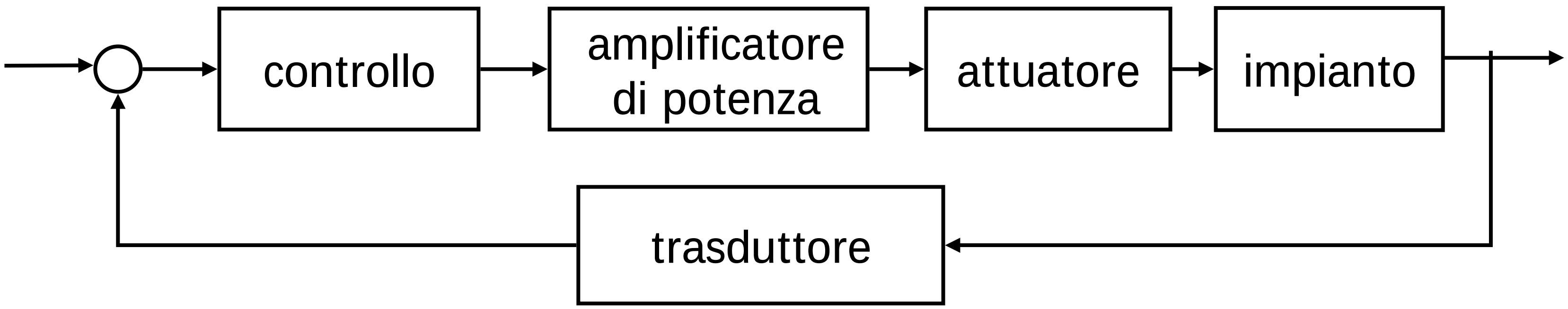
Controlli Automatici LA ed LB

- Sistemi dinamici SISO
- Ampio uso delle *Trasformate di Laplace*
- Progetto di schemi di controllo analogici, ad esempio:
  - Reti correttrici (ritardo, anticipo, ...)
  - PID
  - ...



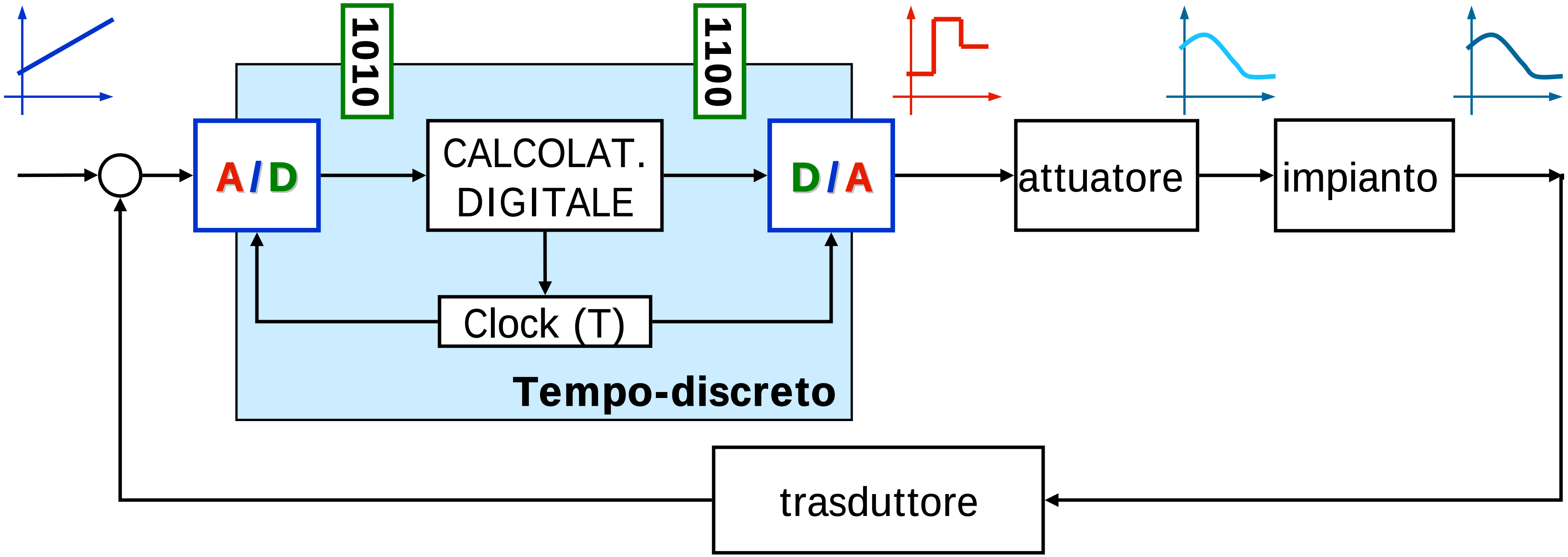
Sistemi di controllo analogico

- *Sistemi di controllo analogici*
  - l'elaborazione della legge di controllo è svolta in maniera tempo-continua
  - ad esempio da circuiti elettrici, idraulici, sistemi meccanici, ...



Sistemi di controllo digitale

- *Sistemi di controllo digitale*
  - Presenza di un calcolatore nel loop di controllo
    - ***Elaborazione tempo-discreta (periodo T) della legge di controllo***
  - Occorrono dispositivi di interfaccia tra
    - il dominio tempo-continuo dell'impianto
    - il dominio tempo-discreto del regolatore

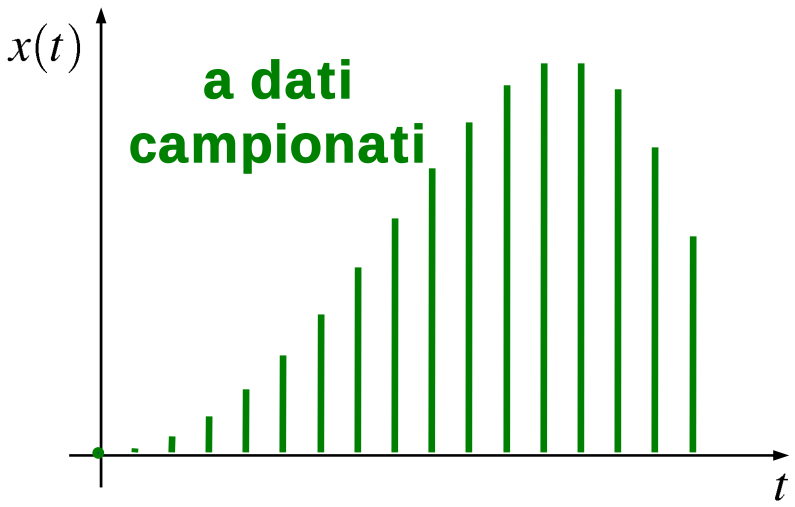


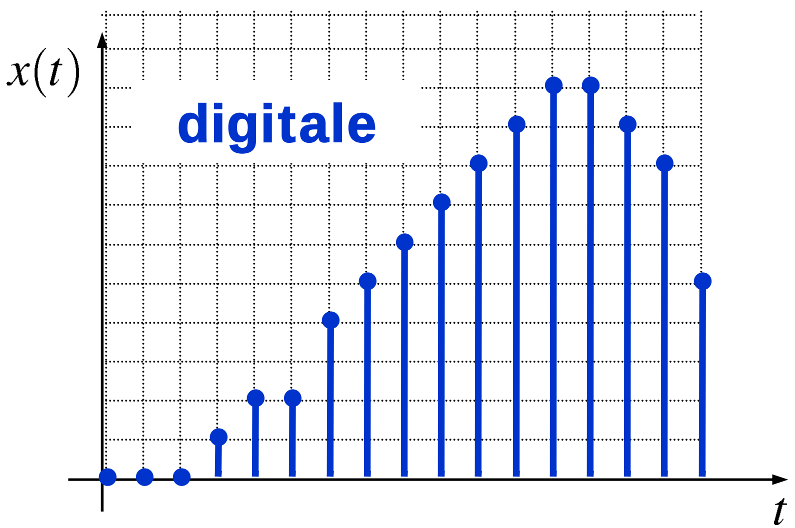
Controllo digitale vs. Controllo analogico

- **Maggiore capacità e precisione di elaborazione**
  - Algoritmi di controllo più complessi
- **Maggiore flessibilità**
  - È sufficiente modificare il software per adattare il sistema a nuove esigenze
- **Maggiore affidabilità e ripetibilità**
  - Non sono presenti fenomeni di usura, deriva termica ecc.
- **Maggiore trasmissibilità dei segnali**
  - I segnali digitali sono molto meno sensibili ai disturbi rispetto a quelli analogici

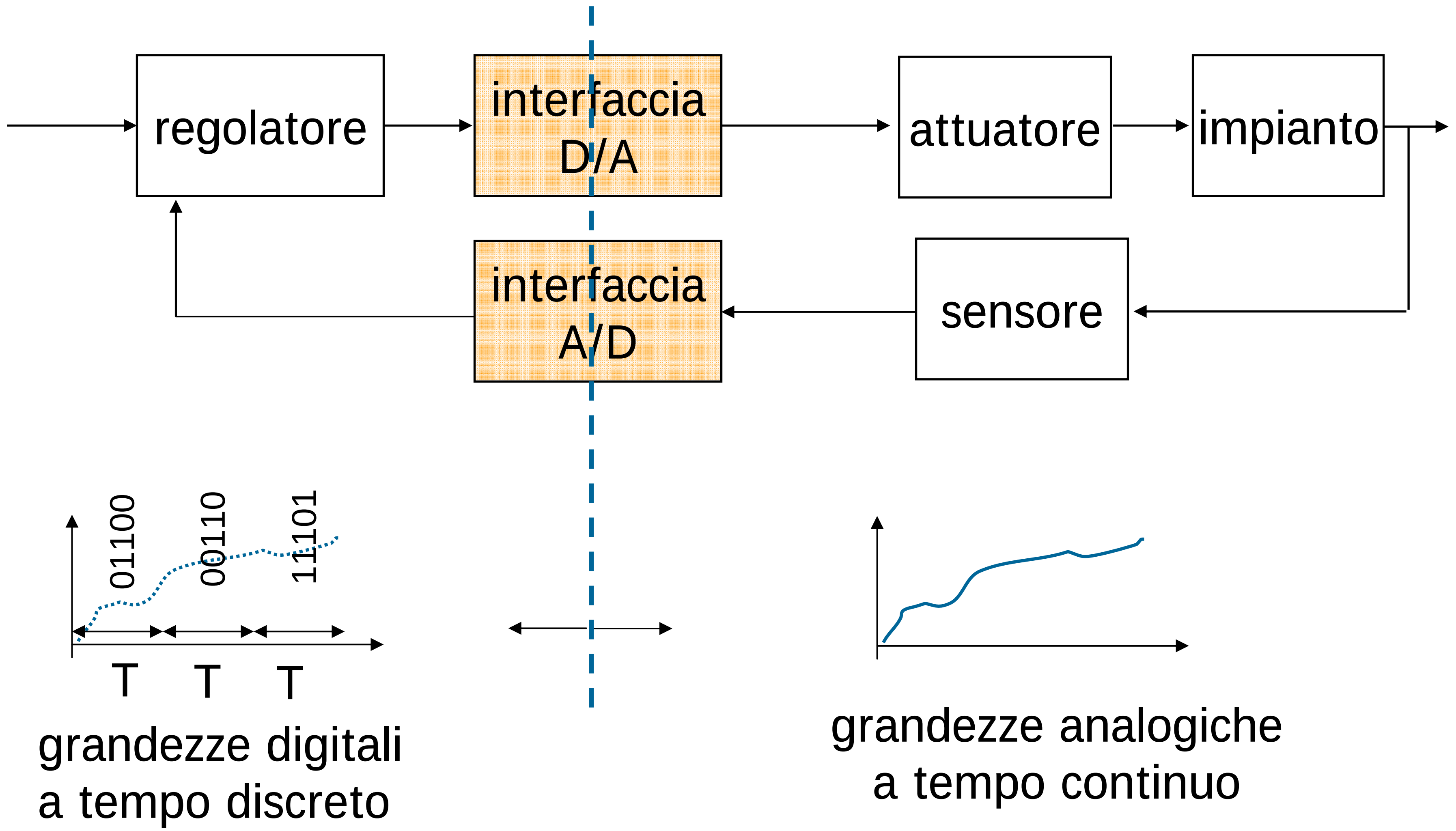
- **Progettazione più difficile e articolata**
  - Occorrono competenze anche nel campo della programmazione e dell'interfacciamento
- **Stabilizzabilità più precaria**
  - Discontinuità nella trasmissione, **ritardi**
  - Importanza del periodo di campionamento
- **Possibilità di arresti non previsti**
  - Il software non ha previsto tutte le possibili situazioni di errore
- **Necessità di utilizzare energia elettrica**

Tipologie di segnale

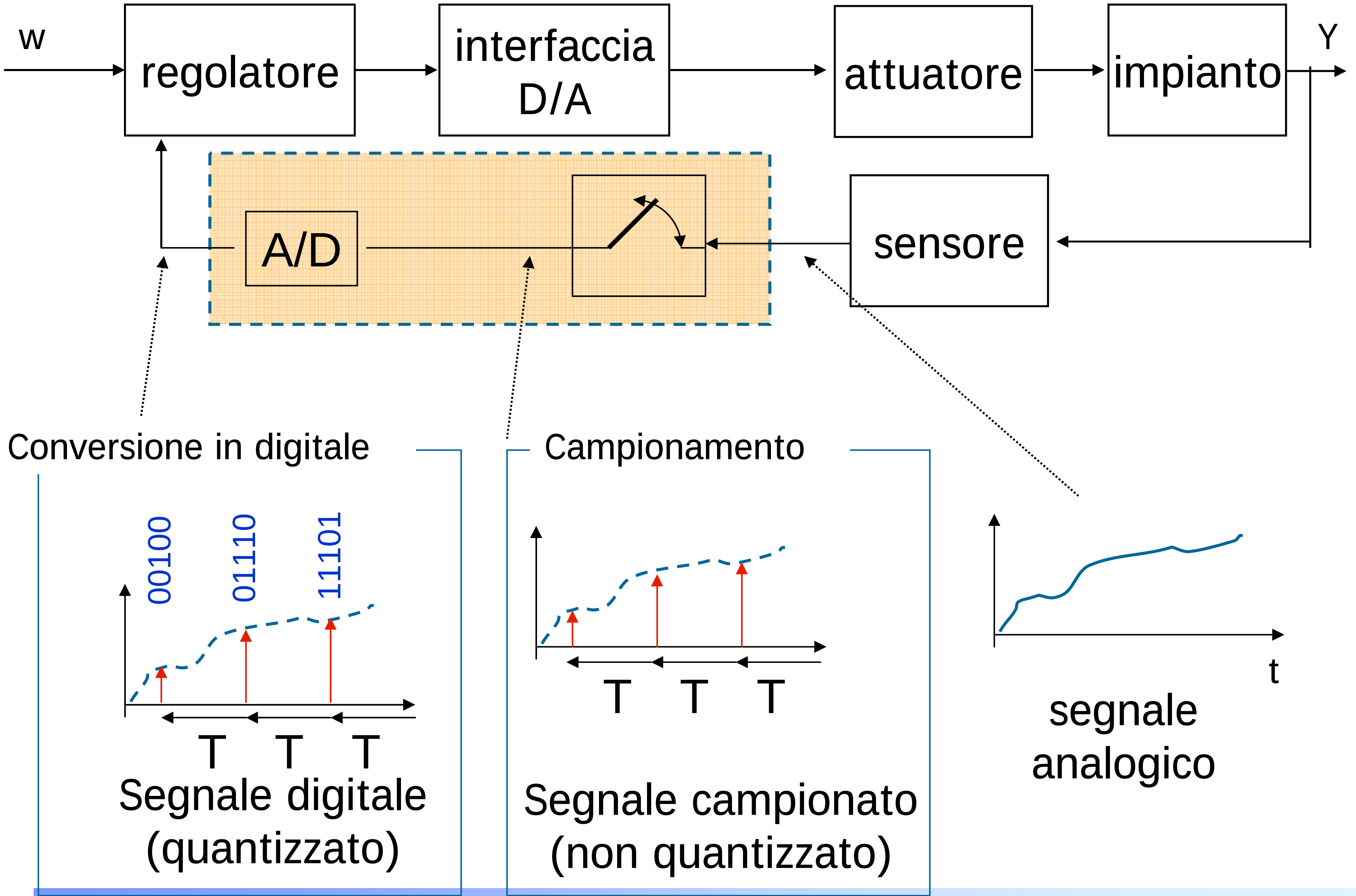




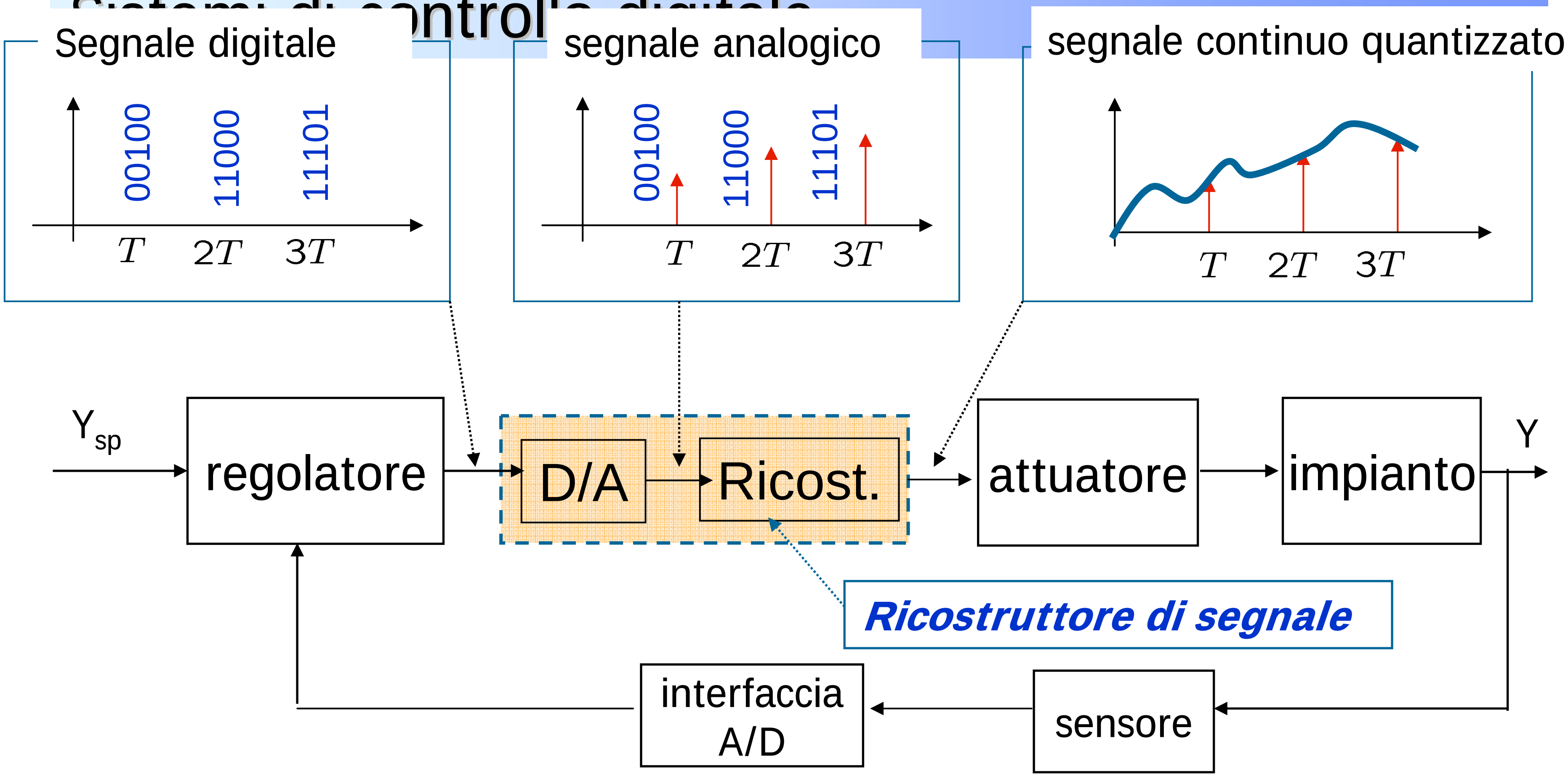
Sistemi di controllo digitale



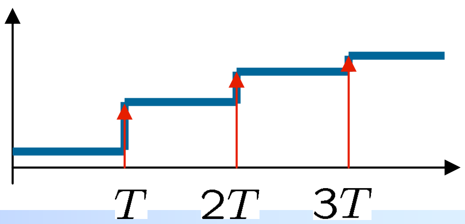
Sistemi di controllo digitale



Sistemi di controllo digitale

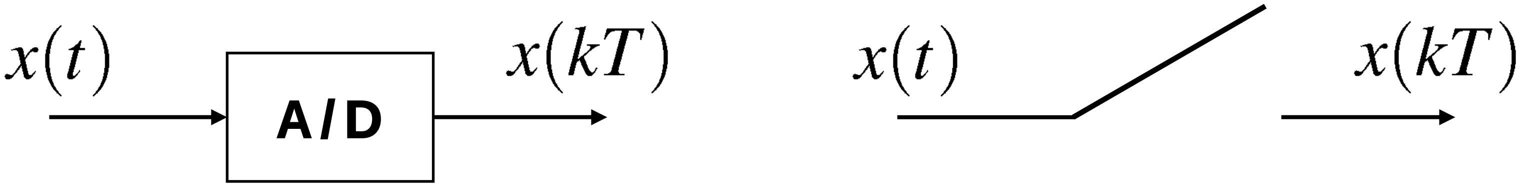


Nota: La scelta piu' semplice per il ricostruttore di segnale risulta essere il circuito di "Hold" (tenuta)

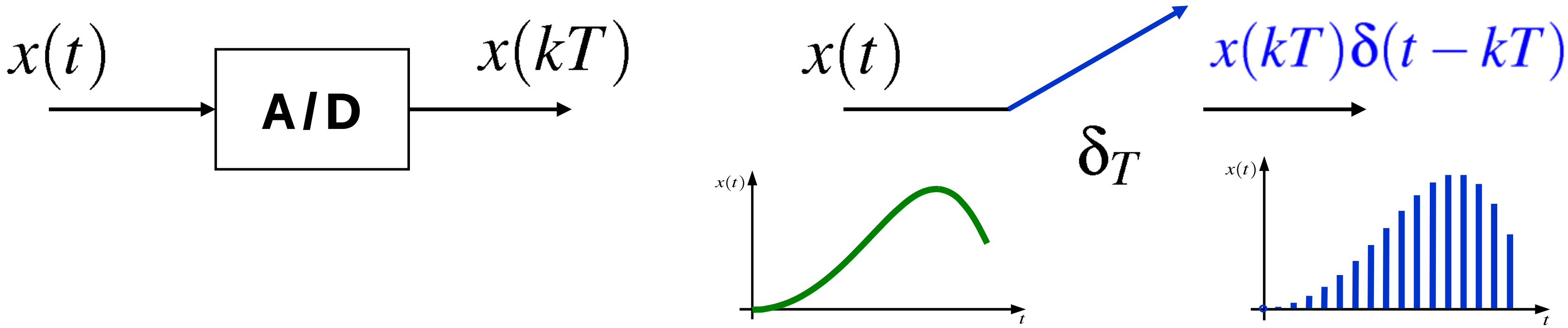


Convertitore A/D

- **Campiona, con periodo T, il segnale di ingresso x(t)**
- **Restituisce in uscita la sequenza dei valori x(kT) codificati e quantizzati**



- **Campionatore a impulsi di Dirac:**
  - la chiusura dell'interruttore è istantanea
  - in uscita produce un impulso di Dirac di "area" pari a x(kT)

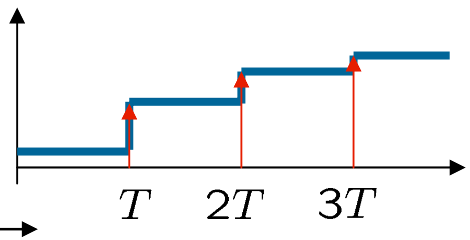


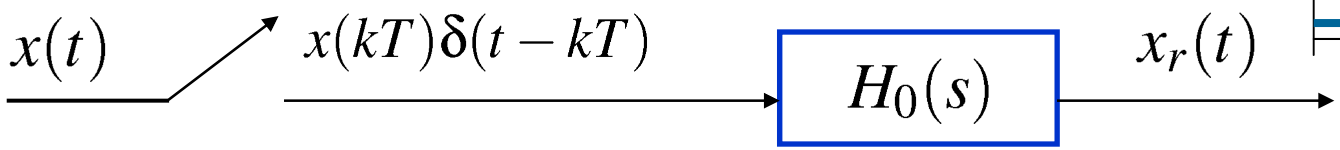
Convertitore D/A

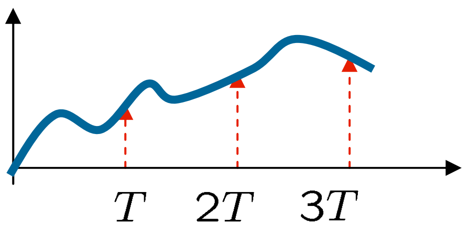
- Fornisce un segnale analogico a partire dalla sequenza di campioni in ingresso
  - **La ricostruzione non è univoca a meno di soddisfare il TEOREMA DI SHANNON**
- **Ricostruttore di ordine zero (Zero Order Hold)**
  - Produce l'uscita:

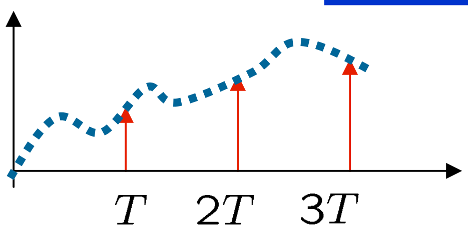
$$x_r(t) = x(kT) \qquad\qquad kT \le t < (k+1)T$$

- Supponendo un campionamento impulsivo:







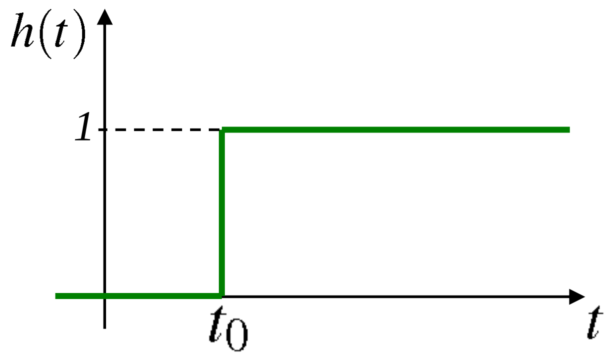


$$H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Convertitore D/A

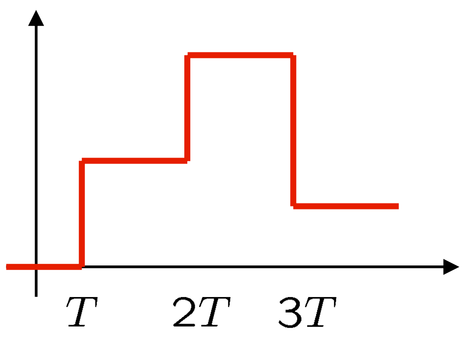
- Si definisca il segnale (gradino) di ampiezza unitaria *h(t)*

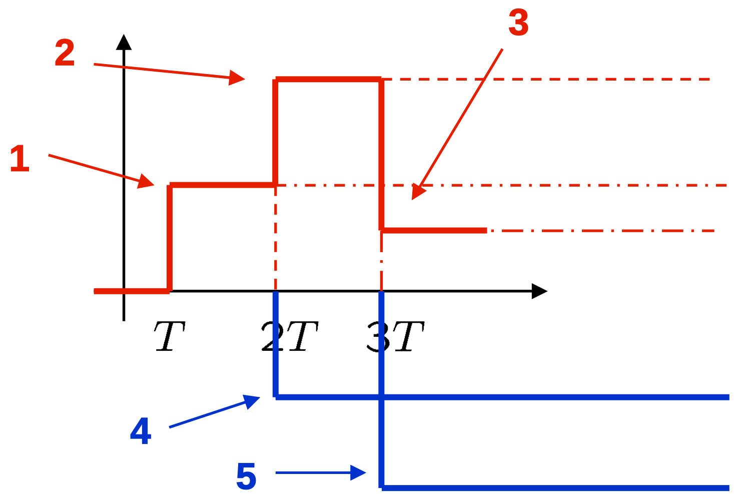
$$h(t_0) = \begin{cases} 0 & t \le t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



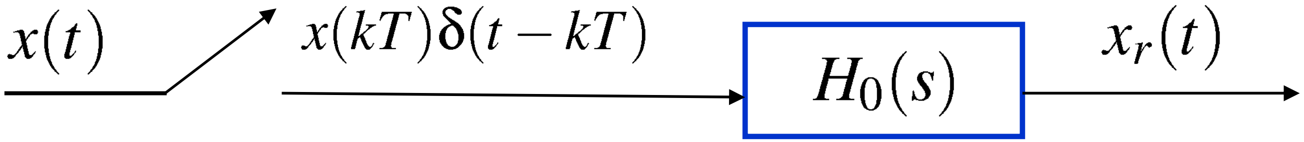
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}$$

- In uscita al ricostruttore di ordine 0 si ha un segnale che può essere considerato come generato da una "successione di gradini"



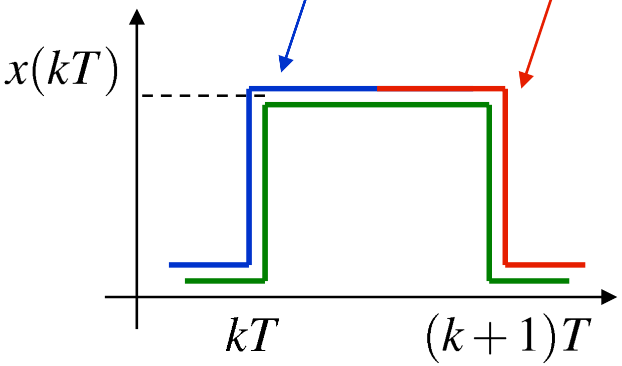


Campionamento e Ricostruzione di segnali



$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left[h(t-kT) - h(t-(k+1)T)\right]$$

Analizzando il solo impulso a $t = kT$



Ricordando la trasformata di Laplace di un segnale ritardato

$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} = \underbrace{\boxed{\frac{1-e^{-Ts}}{s}}}_{H_0(s)} \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}}}_{X^*(s)}$$

Progetto di regolatori tempo-discreto

1) Progetto diretto a tempo discreto

Metodo "diretto"

- discretizzazione del modello
- oggetto di corso specifico (Sistemi di Controllo Digitale L-A)
  - II anno Laurea Triennale di ingegneria dell'Automazione
  - II anno Laurea Specialistica di ingegneria Informatica (a scelta)

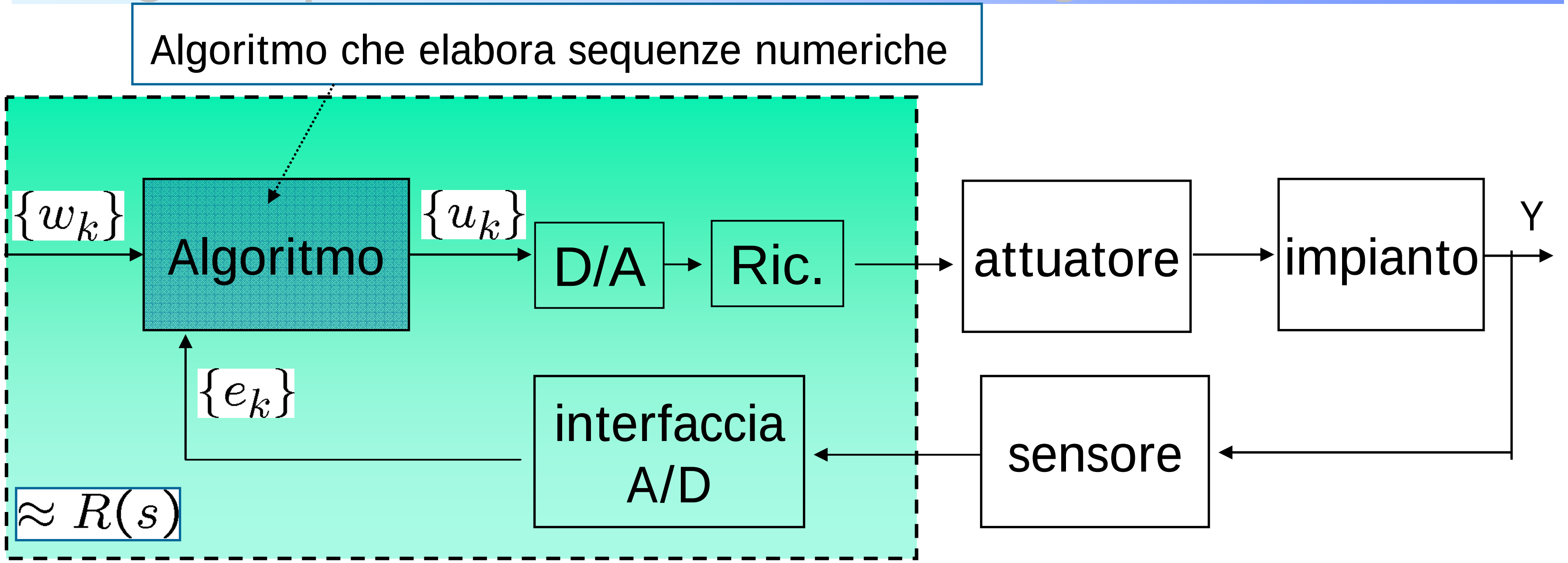
2) Progetto a tempo continuo e discretizzazione del regolatore

Metodo "indiretto"

- più coerente con i corsi di Controlli Automatici LA-LB
- più semplice, perché non richiede molte altre conoscenze
- qualche limitazione legata alla scelta del tempo di campionamento

Oggetto di queste note è presentare qualche principio utile al progetto del regolatore tempo discreto per discretizzazione di un regolatore tempo continuo (secondo metodo)

Progetto per discretizzazione del regolatore



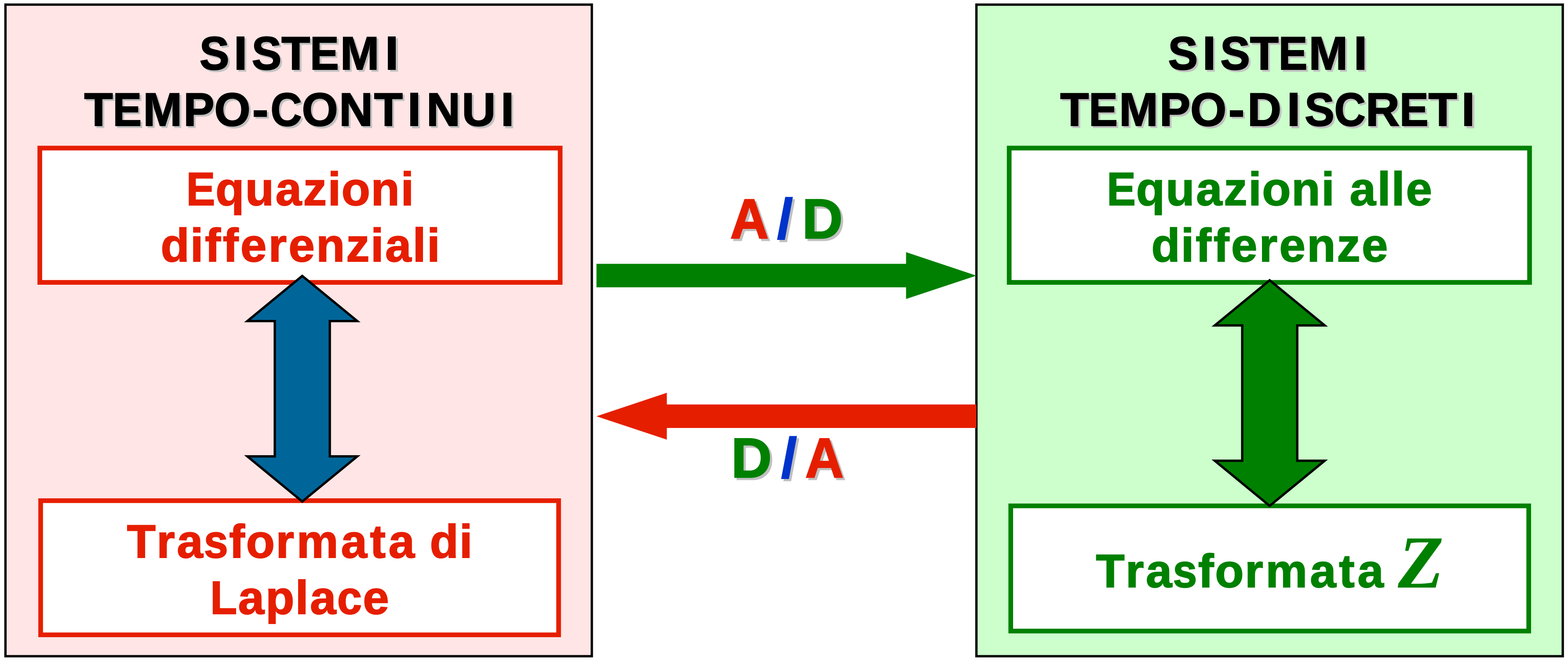
L'algoritmo numerico dovrà essere tale per cui il comportamento del regolatore (complessivo) con ingressi e uscite analogiche sia il più fedele possibile a quello che caratterizza la funzione di trasferimento *R(s)* progettata nel continuo

Problema fondamentale: dimensionare il tempo di campionamento in modo che le grandezze campionate siano una rappresentazione "fedele" del segnale tempo continuo

Descrizione di processi a segnali campionati

$$3\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 5\dot{x}(t) + x(t)$$

$$2y_{k-2} + 5y_{k-1} + y_k = x_k$$



$$3s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = 5sX(s) + X(s)$$

$$2z^{-2}Y(z) + 5z^{-1}Y(z) + Y(z) = X(z)$$

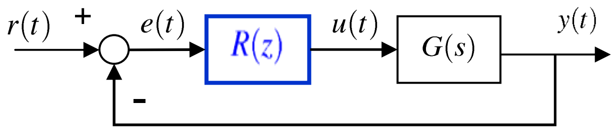
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s+1}{3s^2+2s+1}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2z^{-2}+5z^{-1}+1}$$

Equazioni alle differenze

- Struttura di una equazione alle differenze

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k$$



uscita attuale	campione precedente	2 campioni precedenti	ingresso attuale

- Il valore a pedice di u indica l'istante a cui il valore u_k è riferito

Ponendo:

$$\begin{cases} \nabla u_k = u_k - u_{k-1} \\ \nabla^2 u_k = \nabla u_k - \nabla u_{k-1} = u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2} \end{cases}$$

$$a_2 \nabla^2 u_k - (a_1 + 2a_2)\nabla u_k + (a_2 + a_1 + 1) u_k = b_0 e_k$$

$$\Updownarrow$$

$$a_2 \ddot{u}(t) - (a_1 + 2a_2)\dot{u}(t) + (a_2 + a_1 + 1) u(t) = b_0 e(t)$$

Esempio di equazione alle differenze

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2} \qquad k \geq 2$$

Condizione iniziale: $u_0 = u_1 = 1$

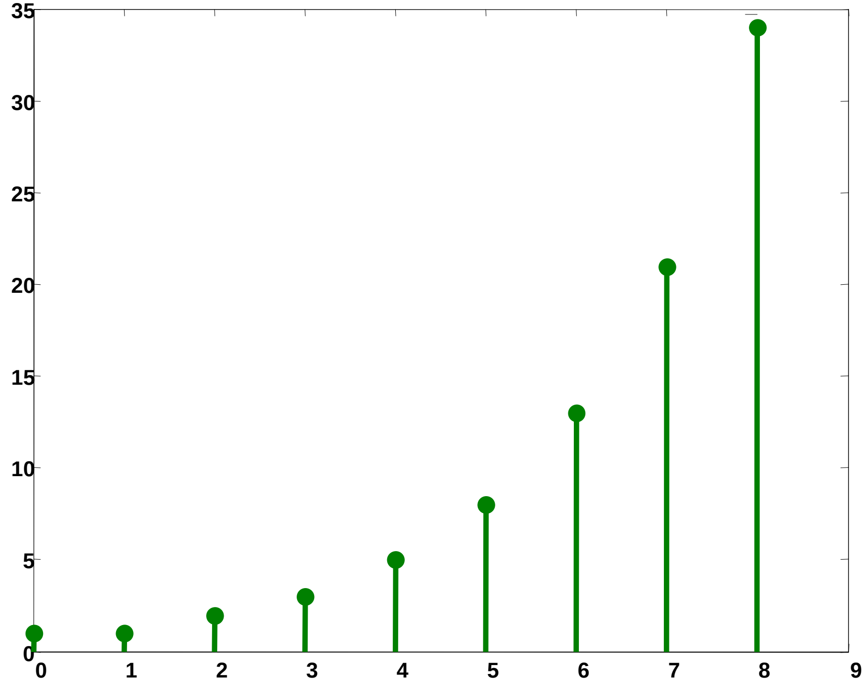
Soluzione generale: $cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$

Dividendo per c e per z^k: $z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$

$$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

$$\begin{cases} u_0 = c_1 z_1^0 + c_2 z_2^0 = 1 \\ u_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 = 1 \end{cases}$$

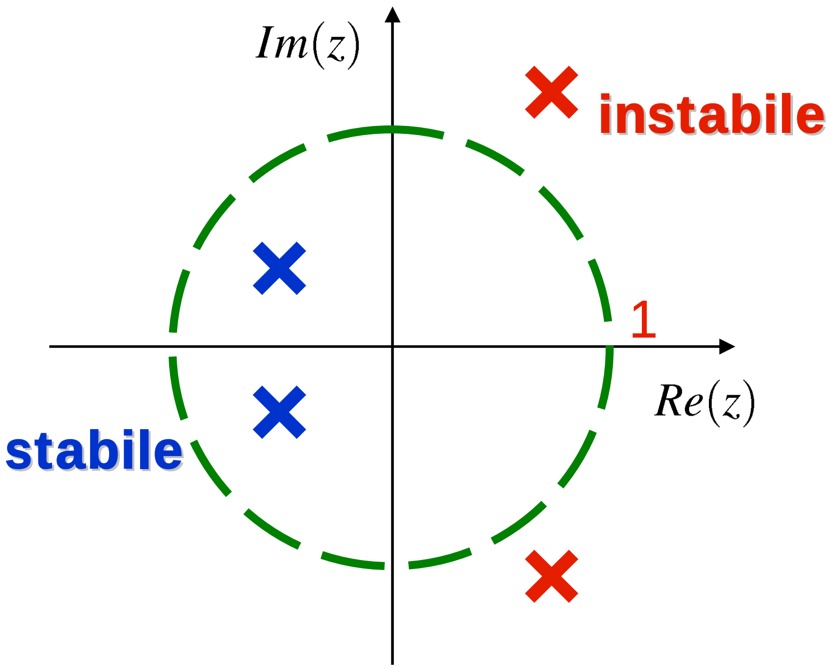
$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{z_2 - 1}{z_2 - z_1} = 0.7236 \\ c_2 = \frac{1 - z_1}{z_2 - z_1} = 0.2764 \end{cases}$$



Equazione caratteristica

$$z^k = z^{k-1} + z^{k-2}$$

- E' detta **equazione caratteristica** (associata all'equazione alle differenze)
  - Si ha **stabilità** se tutte le sue radici cadono all'interno del **cerchio unitario**
  - Se una radice ha modulo maggiore di 1, si ha **instabilità**



Trasformata Zeta

- **Trasformata Zeta** di una sequenza di campioni:

$$x_k = \begin{cases} x(kT) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)]$$

DIPENDE DAL PERIODO (T) DI CAMPIONAMENTO

$$X(z) = x_0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

La Z-trasformata

- Nei casi di interesse ingegneristico, *X(z)* ha una espressione razionale fratta

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{b_0\, z^m + b_1\, z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n} \\
&= \frac{b_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} \qquad m \leq n
\end{aligned}
$$

- p_i, z_i ➔ poli e zeri di *X(z)*

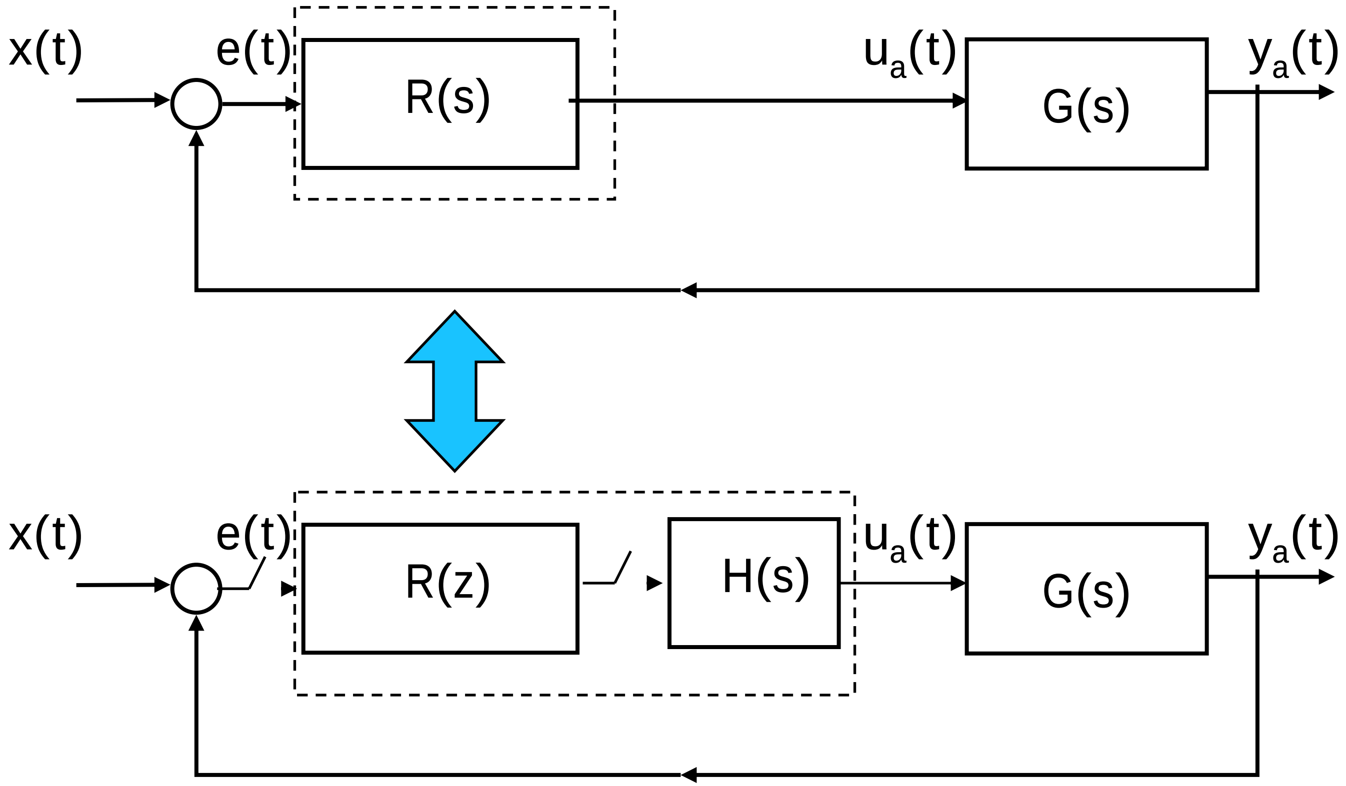
$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{z^n \left(b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n}\right)}{z^n \left(1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}\right)} \\
&= \frac{b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n}}{1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}
\end{aligned}
$$

- Questa è la forma più utilizzata

$z^{-k} \rightarrow$ ritardo di $t = kT$

Progetto di regolatori digitali

- **Metodo indiretto** (per discretizzazione)



- T = ... ? (il piu` piccolo possibile...)

- Data la R(s), vi sono tre passi concettuali:

1) Definizione del periodo di campionamento T

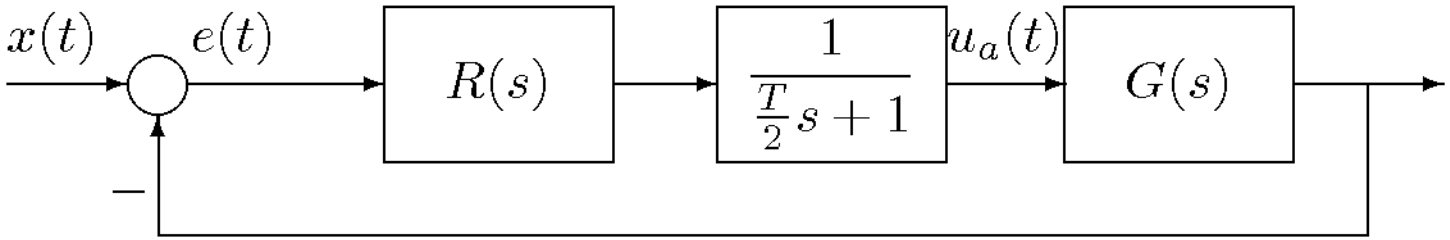
2) Discretizzazione della R(s)

3) Verifica a posteriori (simulativa e sperimentale) del comportamento del sistema

1) Definizione di T e verifica dei margini di stabilità del sistema

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1} \qquad H_0(s) \approx e^{-sT/2}$$

Approssimazione di Padè



- Nel progetto di R(s) si potrà considerare un processo dato da

$$G_1(s) = G(s)H_0(s) \approx G(s)\frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

- NB: il “campionamento” introduce un “guadagno” pari a 1/T

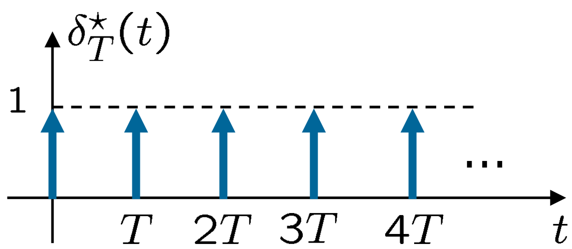
Spettro di segnali campionati

- Segnale tempo continuo:

$$x(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} X(s) \xrightarrow{\text{Fourier}} X(j\omega)$$

- Segnale tempo continuo campionato:

$$x^\star(t) = x(t)\delta_T^\star(t)$$



Laplace →

$$X^\star(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow$$ *Pulsazione di Nyquist*

Fourier ($s = j\omega$)

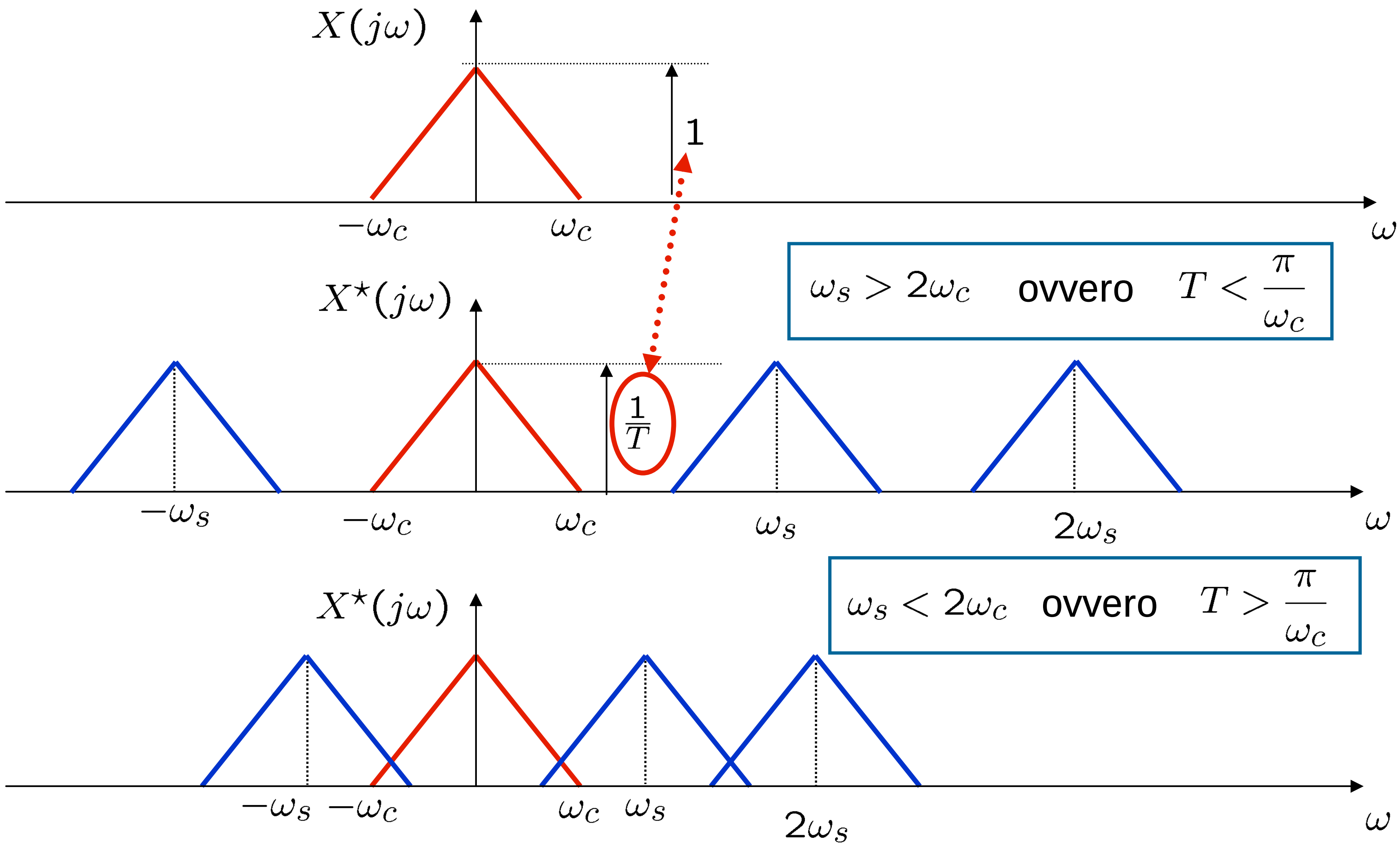
$$X^\star(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Trasformata di Fourier del segnale campionato

Ripetizione periodica dello spettro del segnale tempo continuo

Spettro di segnali campionati

Caso esemplificativo: $X(j\omega)$ a banda limitata ($|X(j\omega)| = 0$ per $|\omega| \geq \omega_c$)



$\omega_s > 2\omega_c$ ovvero $T < \dfrac{\pi}{\omega_c}$

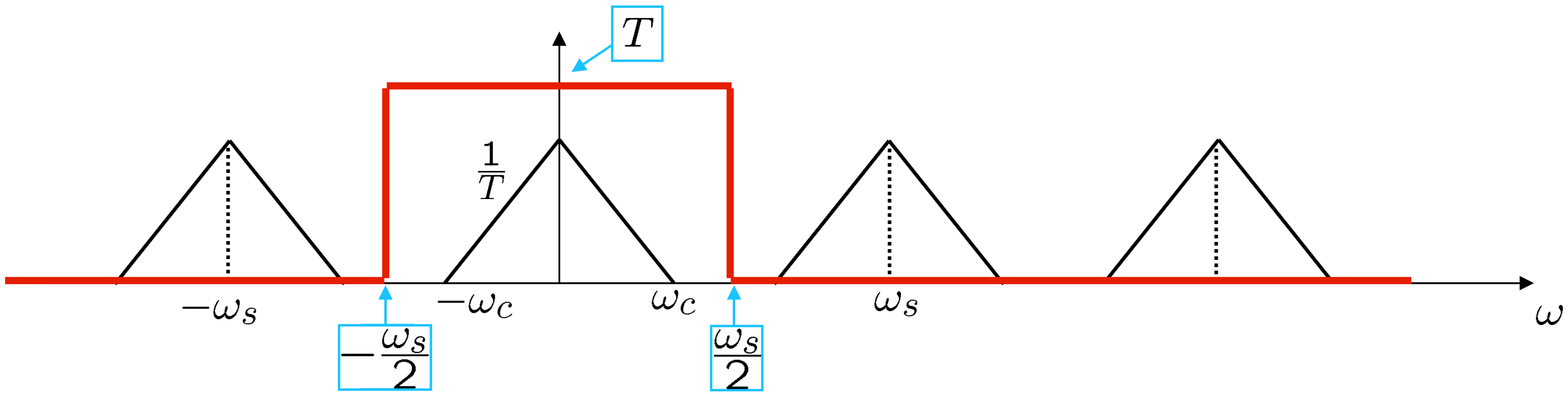
$\omega_s < 2\omega_c$ ovvero $T > \dfrac{\pi}{\omega_c}$

Segnali campionati – Teorema di Shannon

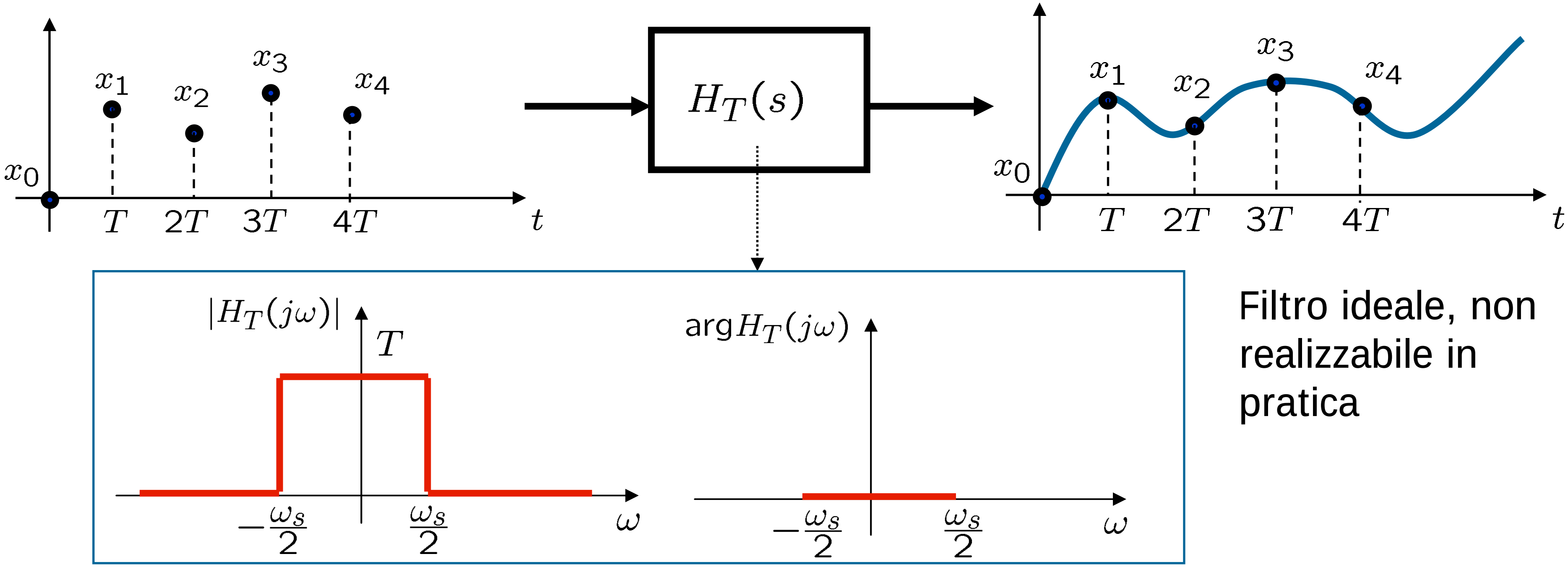
Assumendo che il segnale tempo continuo abbia banda limitata ω_C è possibile ricostruire il segnale tempo continuo $x(t)$ a partire dalla sequenza campionata $\{x(kT)\}$ se risulta

$$\boxed{\omega_S > 2\omega_C \quad \text{ovvero} \quad T < \frac{\pi}{\omega_C}}$$

Ricostruttore (ideale) di segnale: filtro passa banda con pulsazione di taglio pari a $\frac{\omega_S}{2} = \frac{\pi}{T}$ e con amplificazione in banda pari a T

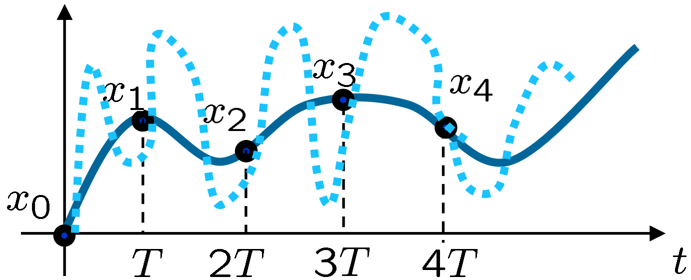


Segnali campionati: Ricostruttore di segnale



Filtro ideale, non realizzabile in pratica

Nota: Ricostruzione del segnale univoca se $\omega_s > 2\omega_c$ ovvero se il tempo di campionamento risulta sufficientemente basso in relazione alla banda del segnale

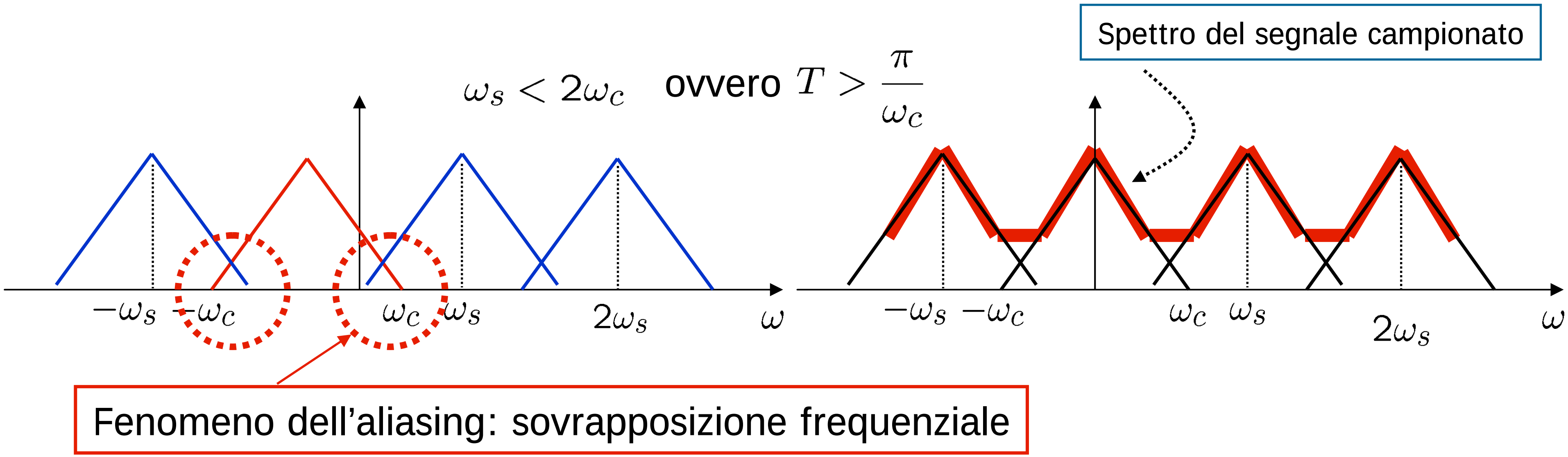


Segnali campionati: Fenomeno dell'aliasing

Nel caso in cui il tempo di campionamento non soddisfi la condizione di Shannon, non è possibile ricostruire il segnale continuo a partire dalla sequenza campionata.

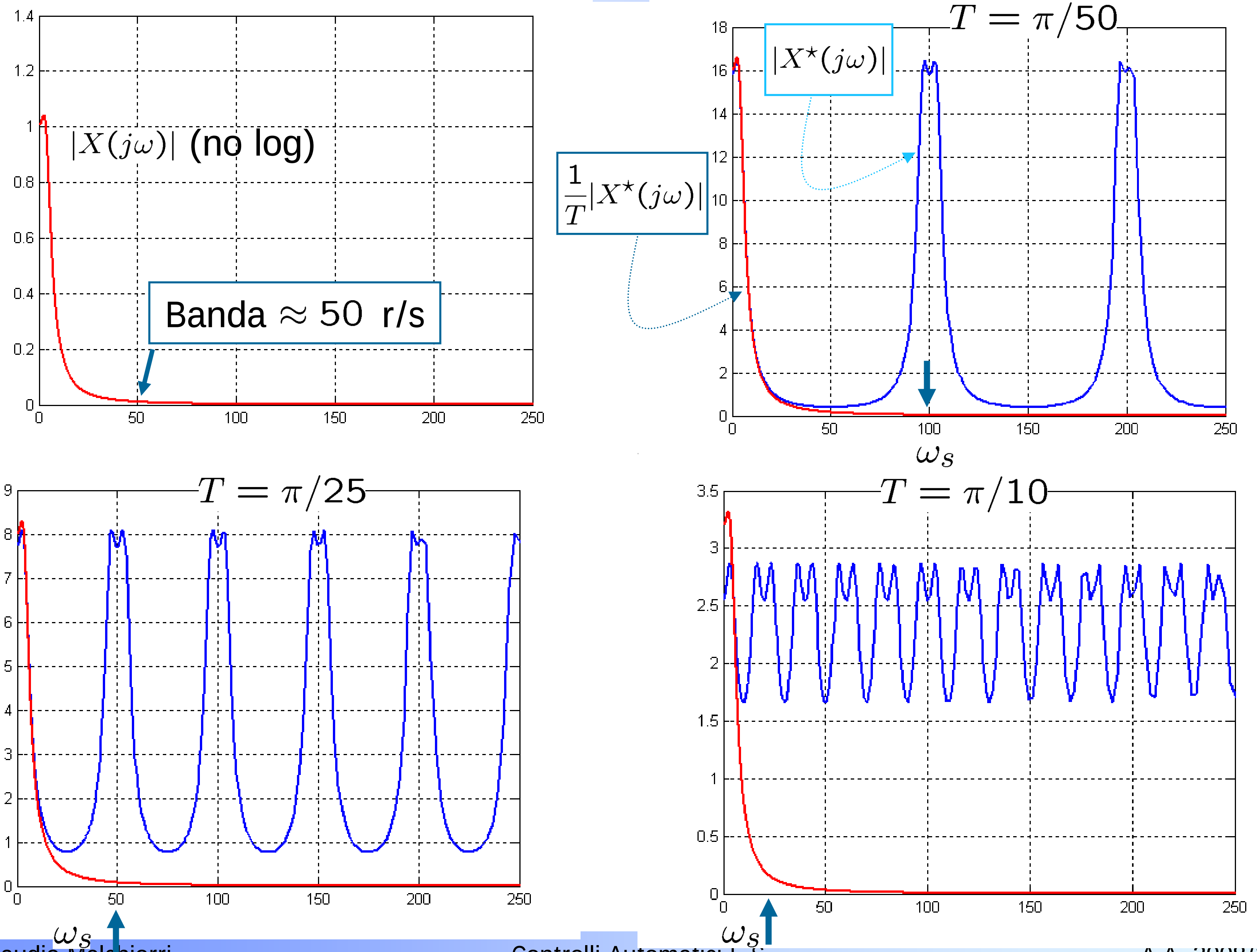
Nel dominio delle frequenze questo si evidenzia con un "overlapping" delle componenti secondarie con la componente primaria
(che non può quindi essere più ricostruita attraverso il ricostruttore prima evidenziato)

$\omega_S < 2\omega_C$ ovvero $T > \dfrac{\pi}{\omega_C}$



Esempio

$$X(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$



Scelta del tempo di campionamento

Problema: I segnali in gioco non avranno, in pratica, banda limitata (componenti spettrali non nulle anche a pulsazioni $\omega > \omega_c$).

Occorre quindi scegliere il tempo di campionamento in modo appropriato

Regola pratica: $\alpha\,\omega_c \leq \omega_s \leq 10\,\alpha\,\omega_c$ con $5 \leq \alpha \leq 10$

$$\frac{\pi}{5\,\alpha\,\omega_c} \leq T \leq \frac{2\pi}{\alpha\,\omega_c}$$

2) Discretizzazione della R(s)

- Vi sono diverse TECNICHE DI DISCRETIZZAZIONE:
  1) metodo delle differenze all'indietro;
  2) metodo delle differenze in avanti (non impiegata nei controlli);
  3) trasformazione bilineare;
  4) trasformazione bilineare con precompensazione frequenziale;
  5) metodo della Z-trasformata, detto anche dell'invarianza della risposta all'impulso;
  6) metodo della Z-trasformata con ricostruttore di ordine 0, detto anche dell'invarianza della risposta al gradino;
  7) metodo della corrispondenza poli/zeri.

- **Metodo delle differenze all'indietro**

$$R(z) = R(s)\Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- Esempio:

$$\frac{d\ y(t)}{dt} + ay(t) = ax(t) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{d\ y(t)}{dt} dt = -a \int_0^t y(t)dt + a \int_0^t x(t)dt$$

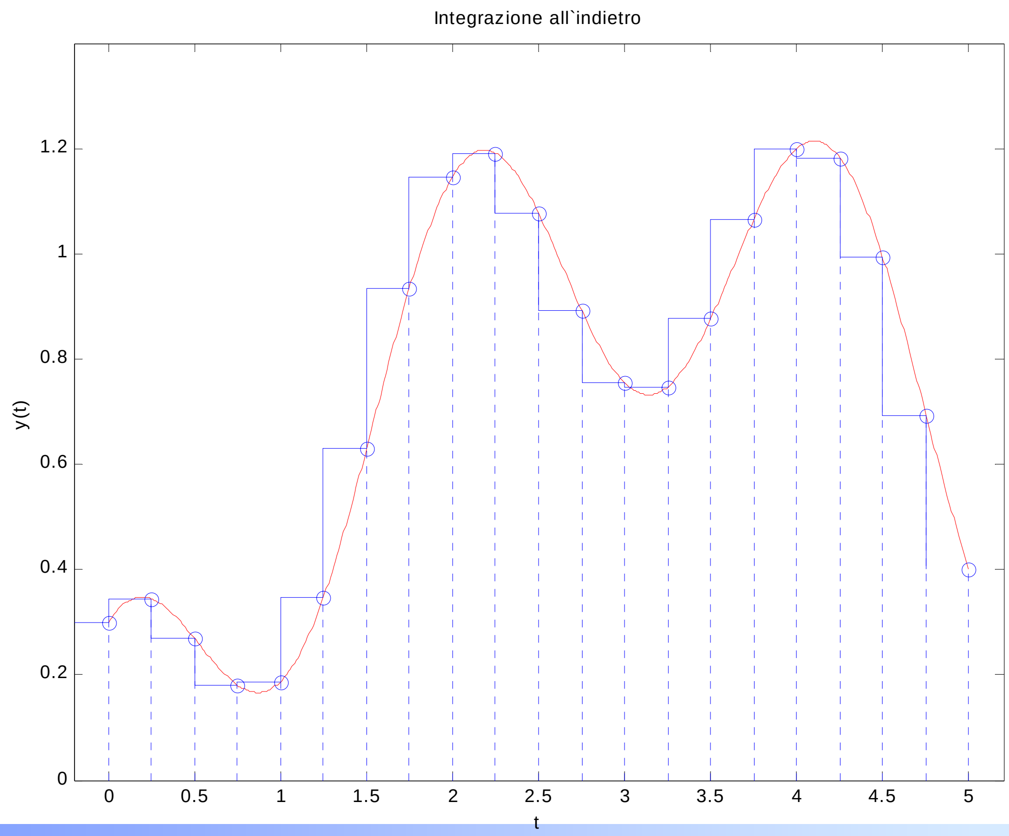
- Calcolando per t = kT, t = (k-1)T e sottraendo

$$\begin{aligned} y(kT) - y((k-1)T) &= -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \\ &\approx -aT[y(kT) - x(kT)] \end{aligned}$$

Progetto di regolatori digitali

- Per calcolare numericamente gli integrali si approssima l'area sottesa alle curve y(t) e x(t) con rettangoli. In particolare, si considerano tra gli istanti (k-1)T e kT i rettangoli di altezza pari a y(kT) o x(kT) (valore finale del periodo considerato). Si ha dunque che:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \quad \approx \quad Ty(kT) \qquad\qquad \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \quad \approx \quad Tx(kT)$$



Progetto di regolatori digitali

- Si ha dunque

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT\left[y(kT) - x(kT)\right]$$

- Da cui

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT\left[Y(z) - X(z)\right]$$

- Cioè

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aT}{1 - z^{-1} + aT} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a}$$

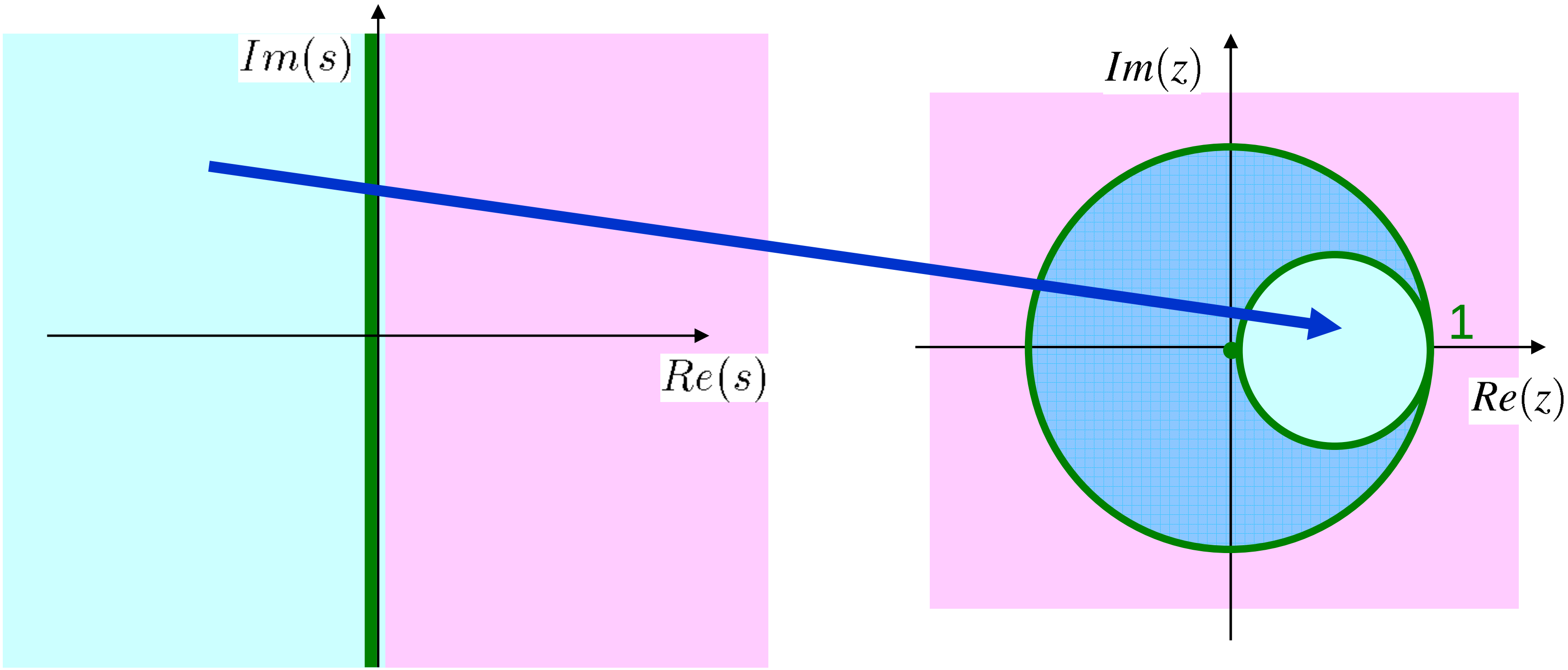
- Utilizzando le trasformate di Laplace per risolvere l'equazione differenziale

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{Tz}$$

Progetto di regolatori digitali

- Con il metodo di integrazione all'indietro, il semipiano sinistro viene trasformato nella circonferenza di raggio r=0.5 centrata in p = (0, 0.5).

- Sistemi G(s) stabili sono trasformati in sistemi G(z) stabili.



Metodo della Trasformazione Bilineare

$$R(z) = R(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

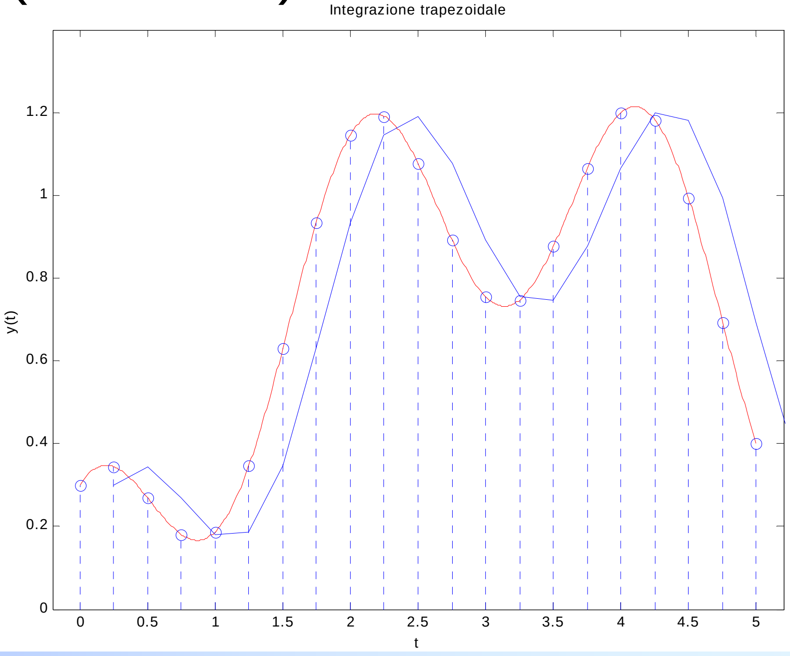
$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2}$$

- Deriva dall'integrazione trapezoidale (o di Tustin)

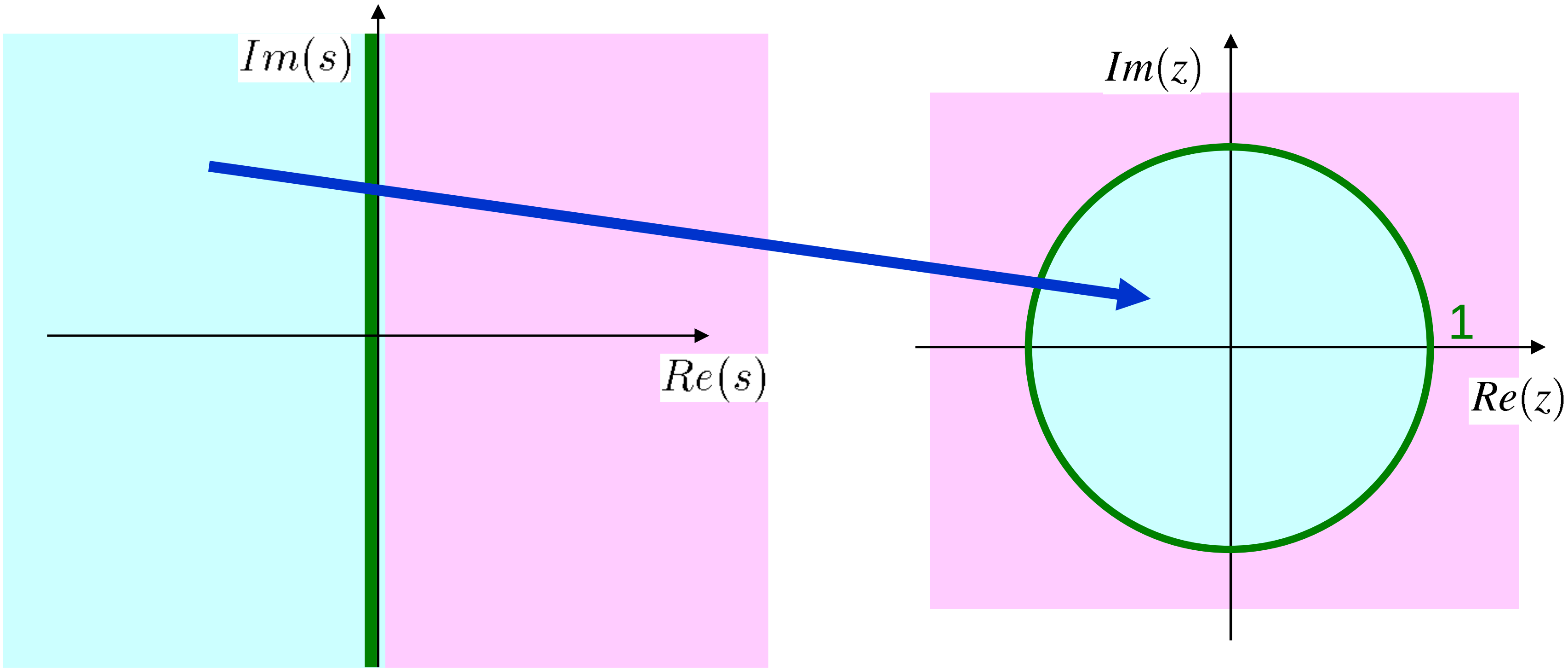
$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \approx \frac{[y(kT)+y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \approx \frac{[x(kT)+x((k-1)T)]T}{2}$$



- Con la trasformazione bilineare, il semipiano sinistro viene trasformato nella circonferenza unitaria (di raggio r=1, centrata in p = (0, 0)).

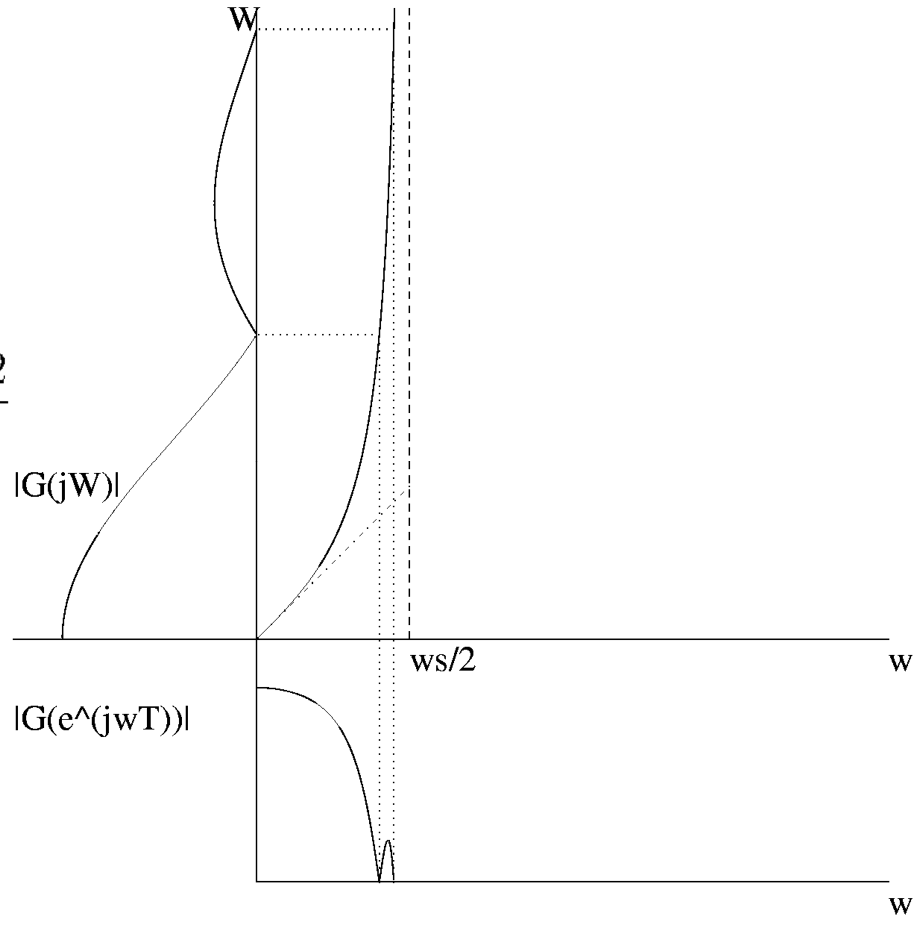
- Sistemi G(s) stabili sono trasformati in sistemi G(z) stabili.



Progetto di regolatori digitali

- La trasformazione introduce una distorsione frequenziale (compressione alle alte frequenze)

$$
\begin{aligned}
j\Omega &= \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{-j\omega T}} \\
&= \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}} = \frac{2}{T}\frac{2j\sin\omega T/2}{2\cos\omega T/2} \\
&= j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}
\end{aligned}
$$



- **Trasformazione Bilineare con precompensazione**

$$s = \frac{\omega_1}{\tan\frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{\omega_1}{\tan\frac{\omega_1 T}{2}} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Si puo` verificare che per $\Omega = \omega_1$

  si ha $\omega = \omega_1$

Esempio: trasformazione di un filtro passa basso con compensazione alla frequenza ω = a

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

$$s = \frac{a}{\tan\frac{aT}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$G_d(z) = \frac{\tan\frac{aT}{2}(1 + z^{-1})}{(\tan\frac{aT}{2} - 1)z^{-1} + (\tan\frac{aT}{2} + 1)}$$

Progetto di regolatori digitali

- **Esempio:** Progettare un filtro passa basso discreto che approssimi il comportamento frequenziale del filtro analogico

$$G(s) = \frac{10}{s+10}$$

in [0, 10] rad/s
per T = 0.2 s

- Con la trasformazione bilineare si ottiene

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

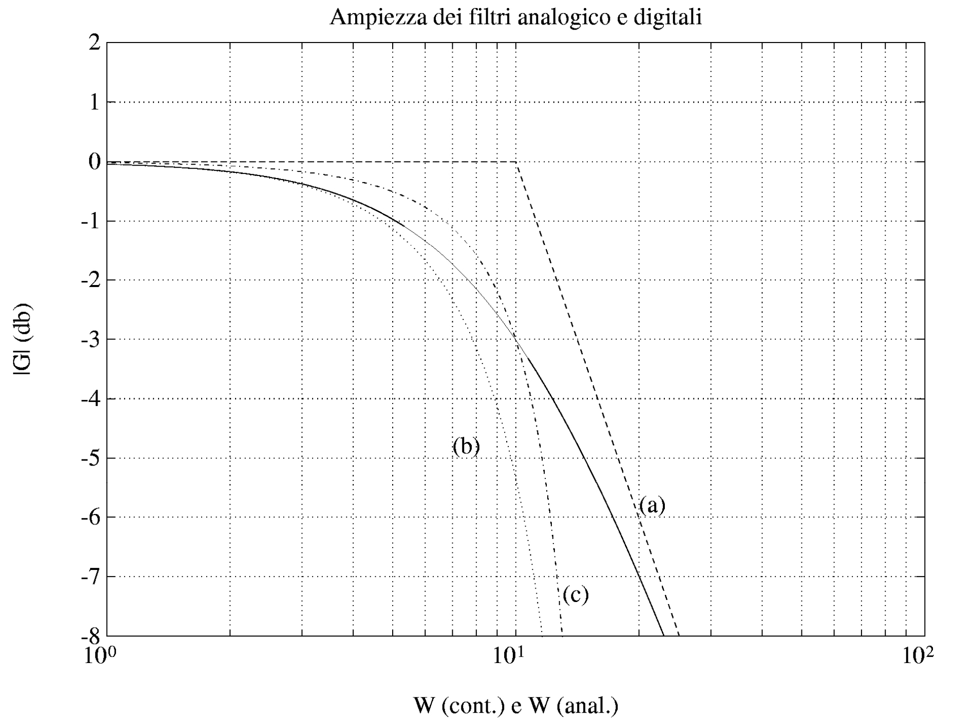
- Notando che

$$\frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{-j\omega T}} = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$

- la relativa funzione di risposta armonica $G_d(e^{j\omega T})$ vale

$$G_d(e^{j\omega T}) = \frac{10}{j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} + 10} = \frac{1}{j\tan 0.1\omega + 1}$$

- Diagrammi delle ampiezze di G(j Ω) e di $G_d(e^{j\,\omega\, T})$, curve (a) e (b) rispettivamente. Le due curve differiscano significativamente nell'intervallo frequenziale di interesse.

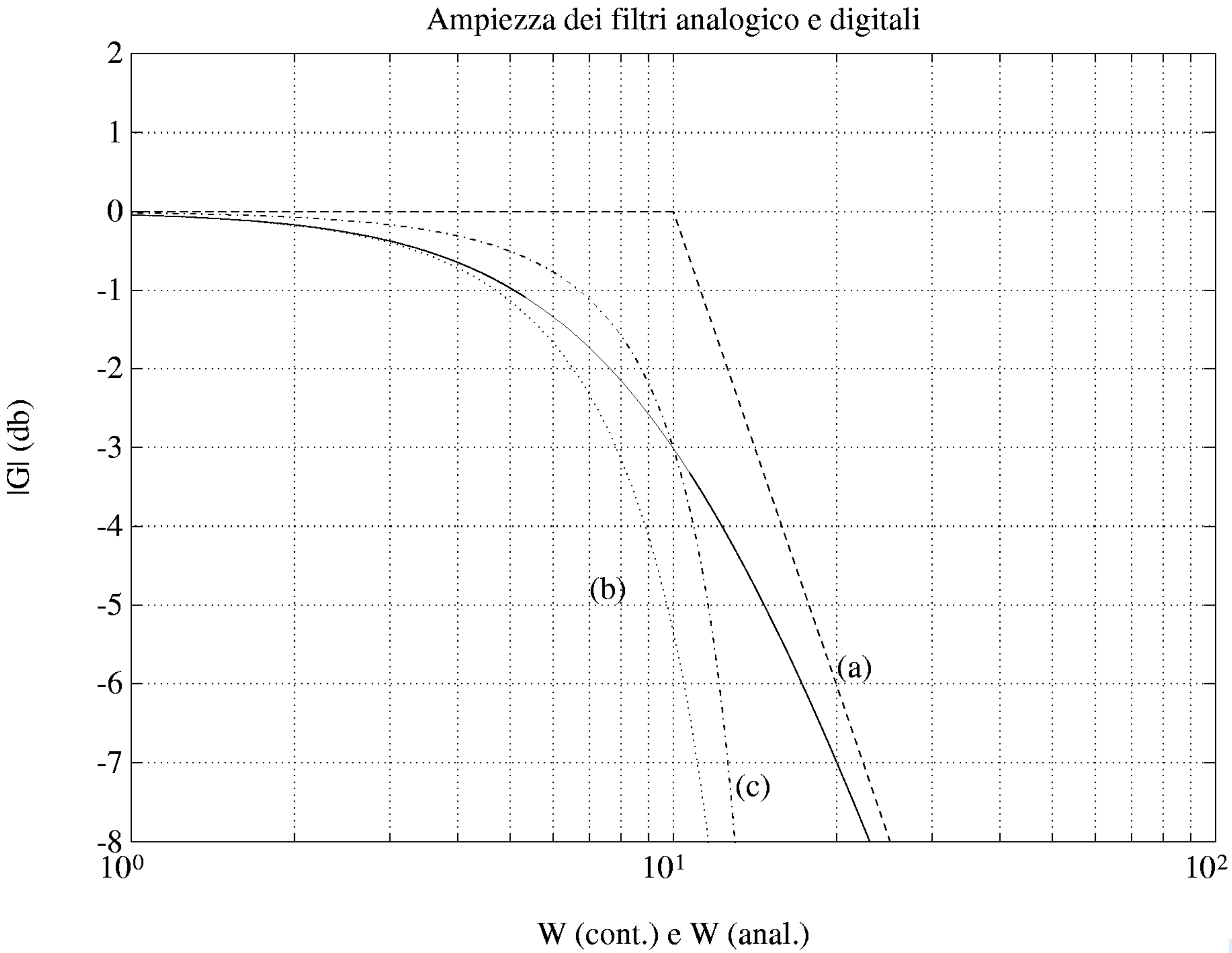


- Con la precompensazione di frequenza per ω = 10 rad/s si ottiene

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{10}{\tan\frac{10T}{2}}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{1.5574}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1.5574} = \frac{0.609(1+z^{-1})}{1+0.218z^{-1}}$$

Progetto di regolatori digitali

- Il modulo della risposta armonica è la curva (c). Per ω = 10 rad/s le curve (a) e (c) coincidono (guadagno pari a –3 db). Con questa tecnica la pulsazione di taglio è mantenuta invariata anche dopo aver discretizzato la G(s). Nel caso senza precompensazione, la pulsazione di taglio del filtro discreto è pari a 7.8 rad/s circa.



Progetto di regolatori digitali

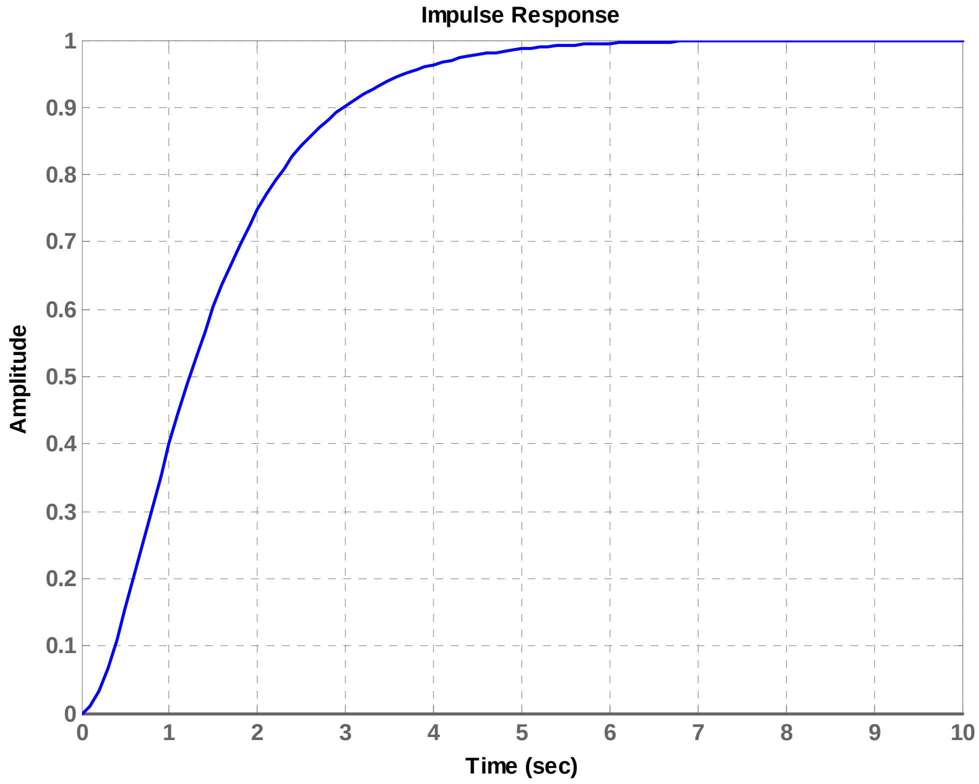
- **Esempio:** Dato il sistema

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

progettare una rete ritardatrice digitale che garantisca il margine di fase M_f = 55°

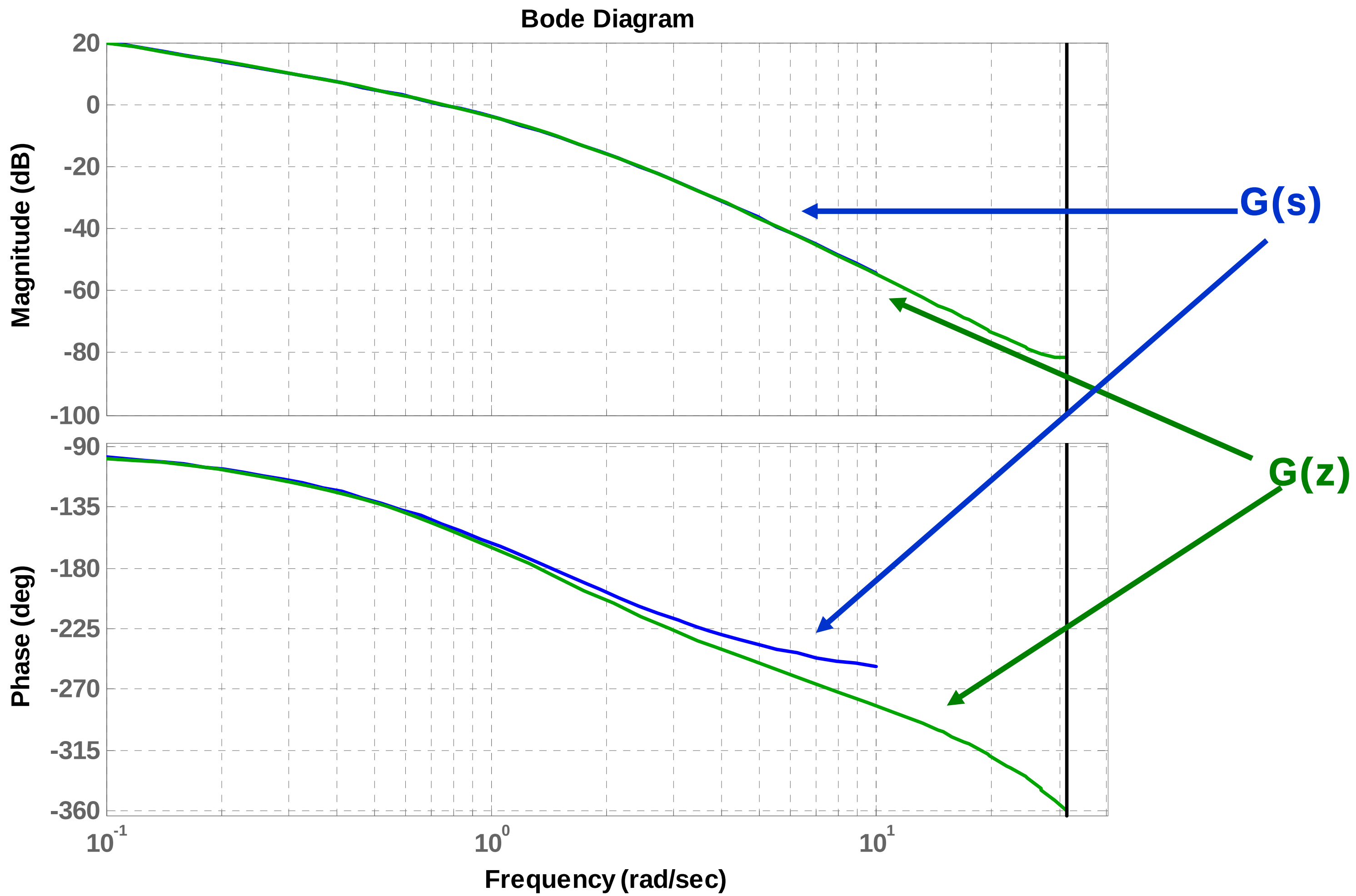
La costante di tempo inferiore corrisponde al polo *p = -2*, ed è pari a τ = 0.5 s.

Si considera quindi un tempo di campionamento *T = 0.1 s*.



Progetto di regolatori digitali

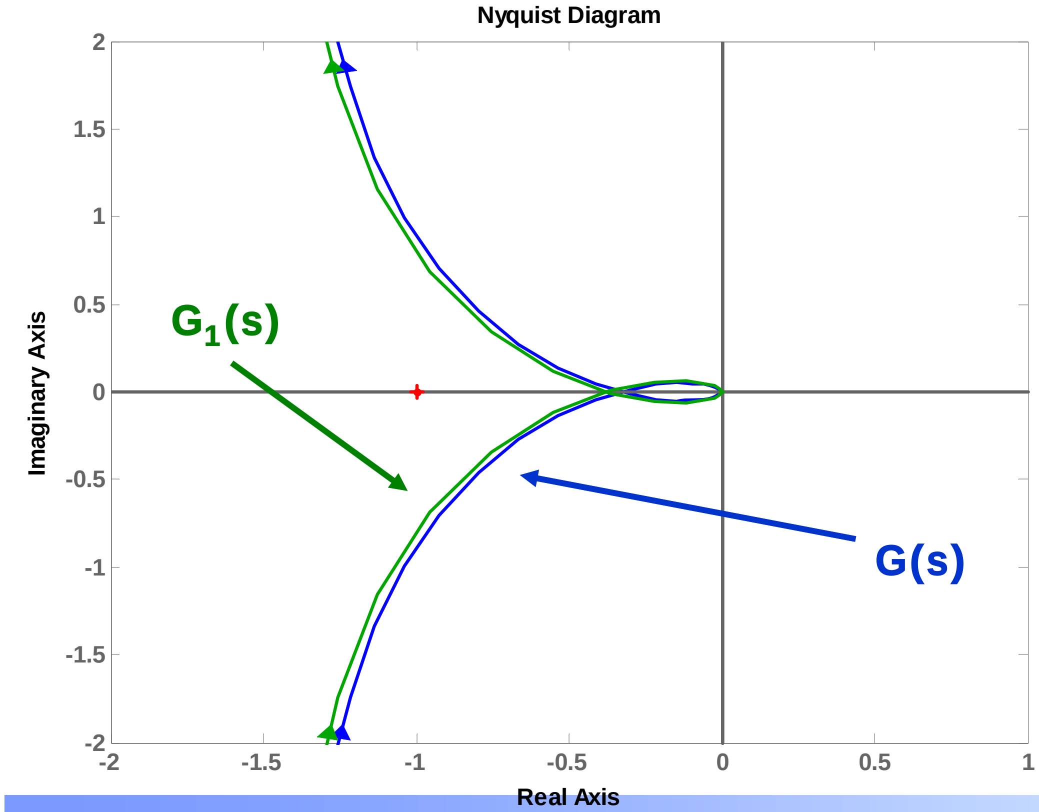
- Diagrammi di Bode della fdt e della fdt campionata



Progetto di regolatori digitali

- Inserendo il ricostruttore di ordine 0, si ha complessivamente la fdt

$$G_1(s) = G(s)H_0(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}\frac{1-e^{-0.1s}}{s} \approx \frac{2e^{-0.05s}}{s(s+1)(s+2)}$$



Si nota un peggioramento del margine di fase (ritardo).
In questo caso il ritardo è modesto (piccolo T)

Risultato simile se si considera l'approssimazione

$$H_0(s) \approx \frac{1}{0.05s+1}$$

Progetto di regolatori digitali

- Si considera quindi la $G_1(s)$ al posto della $G(s)$

$$G_1(s) = \frac{2e^{-0.05s}}{s(s+1)(s+2)}$$

- Effettuando il progetto di una rete ritardatrice che garantisca per $G_1(s)$ il margine di fase $M_F = 55^o$, si ottiene la rete:

$$R(s) = \frac{0.4(s+0.02238)}{s+0.008951}$$

- Discretizzando *R(s)* (es. Trasf. Bilineare) con *T = 0.1 s* si ha

$$\begin{aligned} R(z) &= R(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{0.4(2.0022-1.9978z^{-1})}{2.0009-1.9991z^{-1}} = \frac{0.4003(1-0.9978z^{-1})}{1-0.9991z^{-1}} \end{aligned}$$

- N.B. Possibili problemi di arrotondamento per cifre “simili”

Progetto di regolatori digitali

- Si è ottenuto il regolatore R(z)

$$R(z) = \frac{0.4003(1 - 0.9978z^{-1})}{1 - 0.9991z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)} \quad \rightarrow \quad U(z) = R(z)E(z)$$

- Per la realizzazione su elaboratore digitale, è necessario ricavare la corrispondente equazione alle differenze. Si procede come segue:

$$U(z) = R(z)E(z) = \frac{N_R(z)}{D_R(z)}E(z) \quad \rightarrow \quad D_R(z)U(z) = N_R(z)E(z)$$

- Da cui

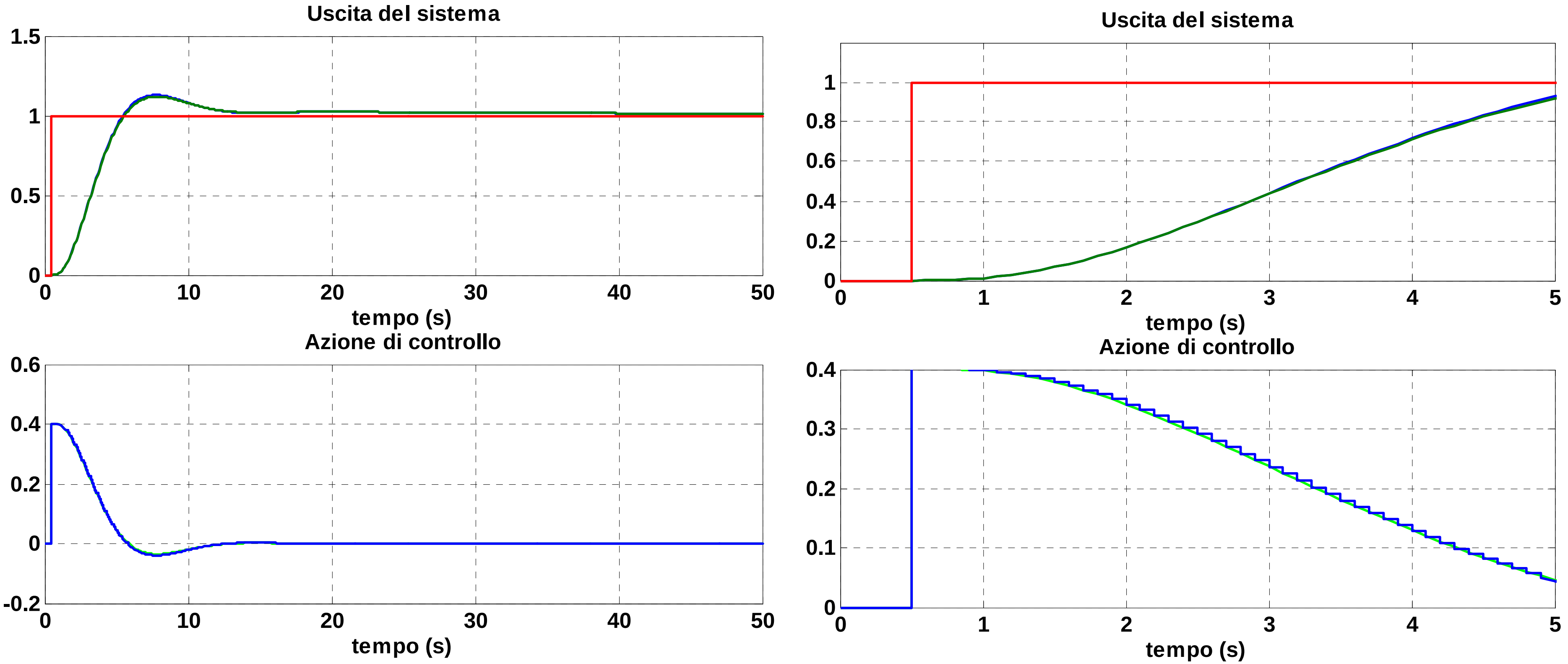
$$U(z)(1 - 0.9991z^{-1}) = 0.4003(1 - 0.9978z^{-1})E(z)$$

- E quindi

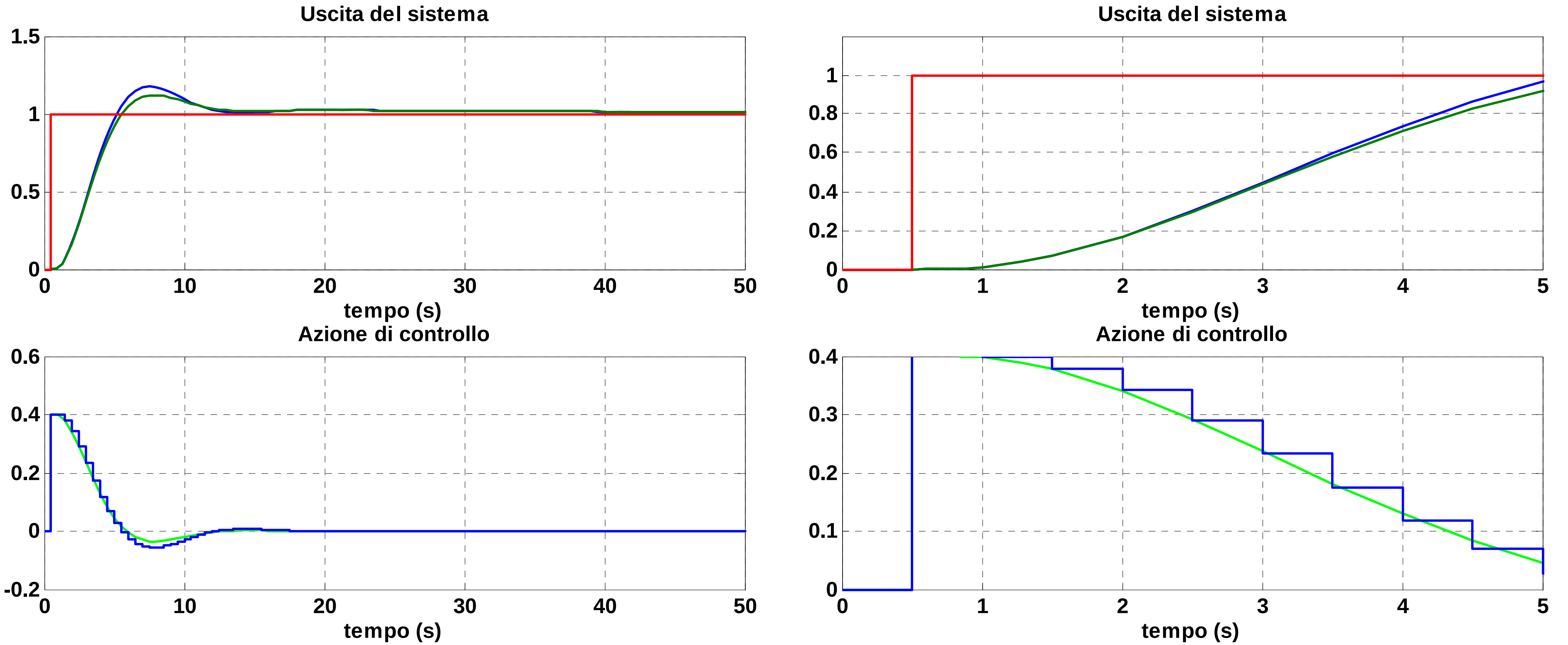
$$u_k - 0.9991u_{k-1} = 0.4003e_k - 3.994e_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_k = 0.9991u_{k-1} + 0.4003e_k - 3.994e_{k-1}}$$

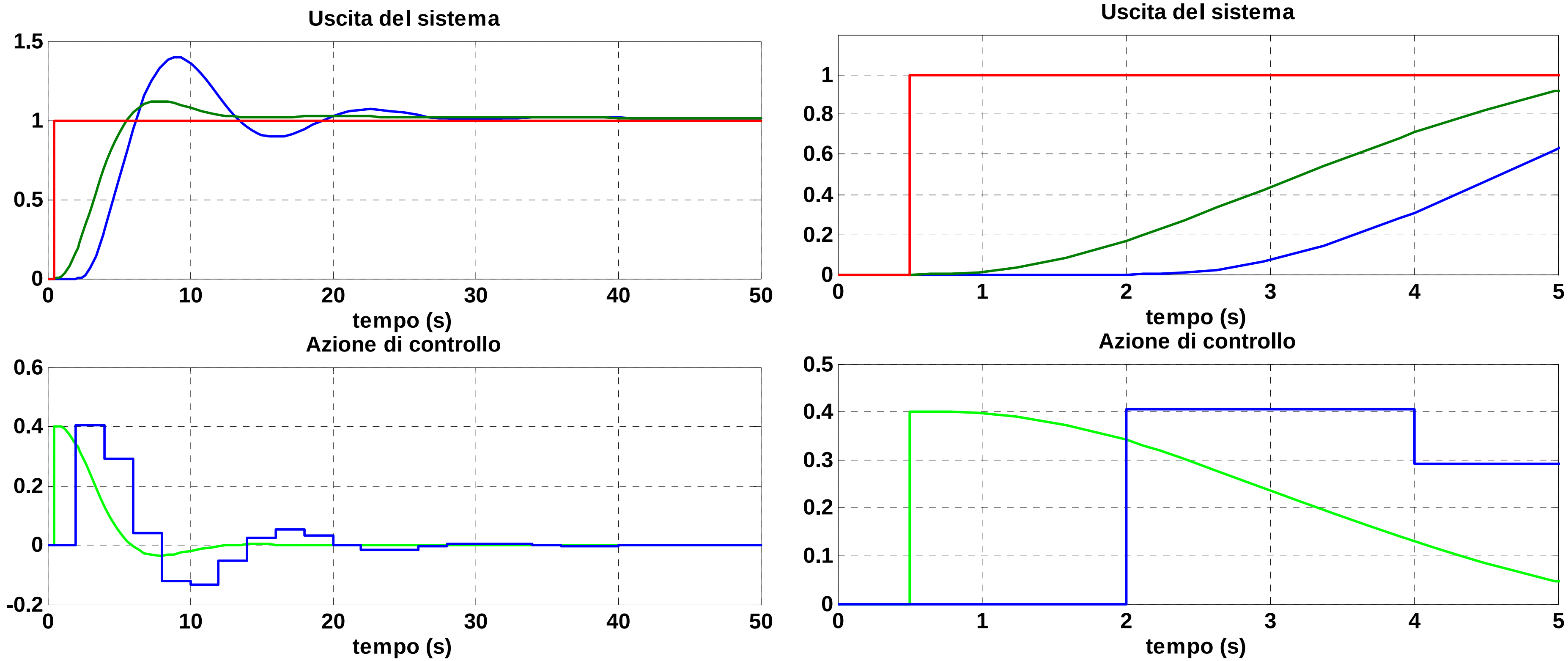
Risultati con T = 0.1 s



Risultati con T = 0.5 s



Risultati con T = 2 s



- **Esempio:** Dato il sistema

$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

progettare un controllore digitale che verifichi le seguenti specifiche sul sistema in retroazione:

- $\delta = 0.7$ (S = 5%)
- $T_a = 0.66$ s

Dalla specifica sul tempo di assestamento T_a si ricava:

$$T_a = \frac{3}{\delta \omega_n} \quad \rightarrow \quad \omega_n = 6.49 rad/s$$

e quindi il sistema dovra` presentare oscillazioni smorzate con periodo

$$T_{os} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = 1.355\ s$$

Si considera quindi un tempo di campionamento T = 0.1 s ($\approx T_{os}/10$).

- Considerando il ricostruttore di ordine 0

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \approx \frac{1}{Ts/2 + 1} = \frac{20}{s + 20}$$

- Si ottiene complessivamente

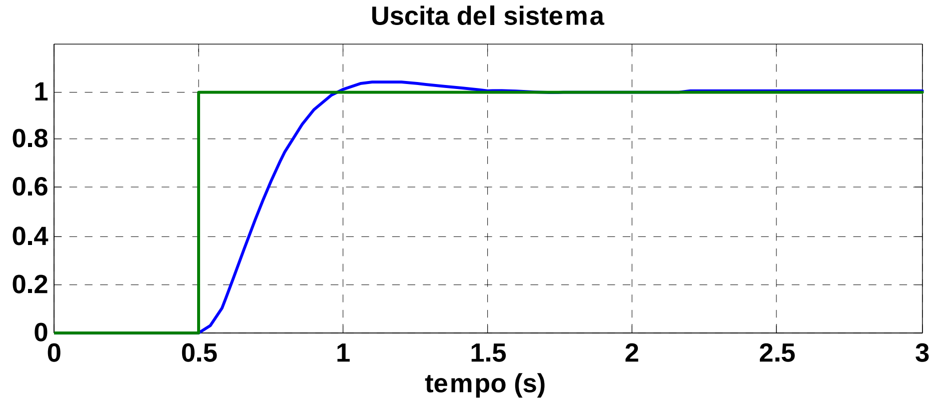
$$G_1(s) = G(s)H_0(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+20)}$$

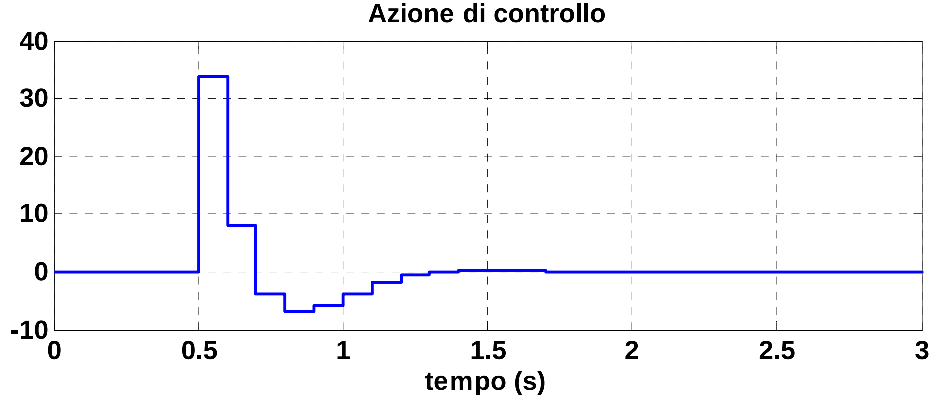
- Un controllore analogico che verifica le specifiche richieste (dal luogo delle radici) è dato da

$$R(s) = \frac{50.6(s+2)}{(s+13)}$$

- Con la trasformazione bilineare si ottiene dunque il regolatore R(z)

$$R(z) = R(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{50.6(2.2-1.8z^{-1})}{(3.3-0.7z^{-1})} = \frac{33.733(1-0.8182z^{-1})}{(1-0.2121z^{-1})}$$





$$\boxed{u_k = 0.2121u_{k-1} + 33.733e_k - 27.60e_{k-1}}$$

Appendice A

- *Trasformata Z di funzioni elementari*
- *Proprietà della Trasformata Z*

La Z-trasformata – Funzioni elementari

- Impulso discreto unitario. Sia data la funzione, detta anche funzione delta di Kronecker $\delta_0(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \\ &= 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Gradino unitario. Sia data la funzione

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

Serie convergente per $|z| > 1$

La Z-trasformata – Funzioni elementari

- Rampa unitaria. Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Poiche` x(kT) = kT, k = 0, 1, 2, ..., la Z-trasformata e`

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots) \\ &= T\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T\frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Serie convergente per $|z| > 1$

- Funzione potenza a^k. Sia data la funzione:

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

a costante reale o complessa

Dalla definizione si ha

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + a\,z^{-1} + a^2\,z^{-2} + a^3\,z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - a\,z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Serie convergente per $|z| > a$

La Z-trasformata – Funzioni elementari

- Funzione esponenziale. Sia data la funzione:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

a costante reale o complessa

- Poiche` $x(kT) = e^{-akT}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, si ha

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[e^{-at}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

Convergente per $|z| > e^{-Re(a)T}$

- Funzione sinusoidale. Sia data la funzione:

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Dalle formule di Eulero $\sin \omega t = \dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}\, z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}\, z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\,\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \qquad |z| > 1 \\ &= \frac{z^{-1}\sin \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

Convergente per |z| > 1

La Z-trasformata – Funzioni elementari

- Funzione cosinusoidale. Sia data la funzione:

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Analogamente a prima, con le formule di Eulero

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\cos \omega t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \qquad |z| > 1 \\ &= \frac{1 - z^{-1}\cos \omega T}{1 - 2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

Convergente per |z| > 1

Tabelle delle Z-Trasformate

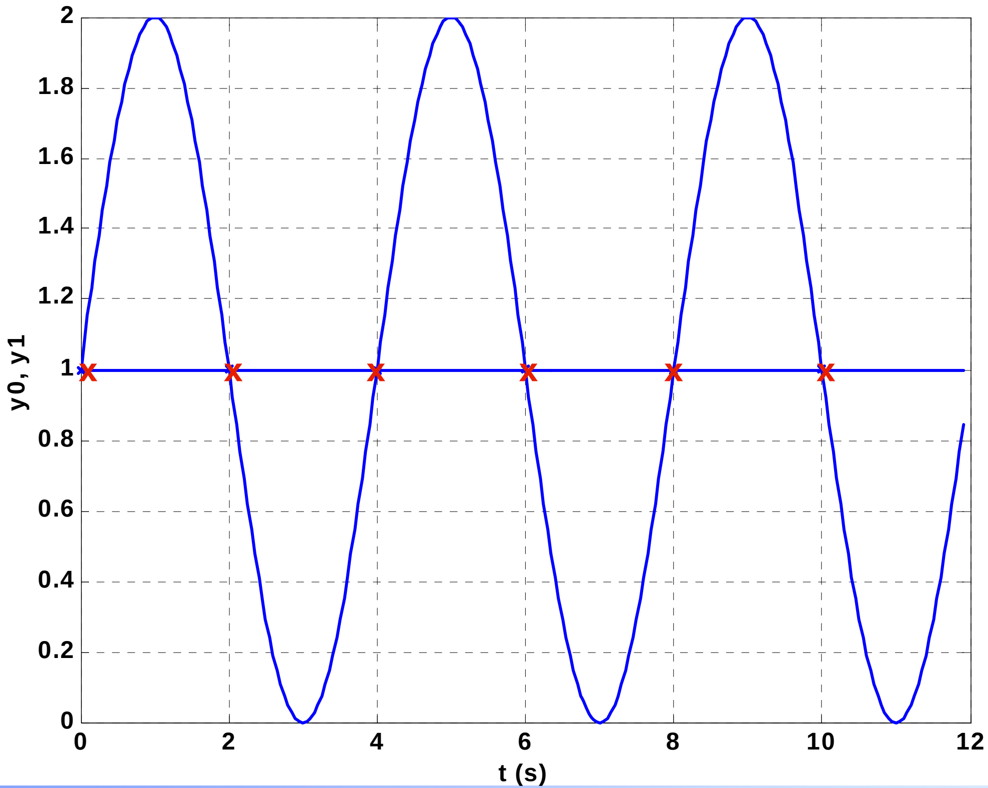
$f(t)$	$\mathcal{L}[s]$	Trasformata $\mathcal{Z}$	Trasformata $\mathcal{Z}$ modificata
$h(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1}+\frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
t^{k-1}	$\frac{(k-1)!}{s^k}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-amT}[e^{-aT}+m(z-e^{-aT})]}{(z-e^{-aT})^2}$

Tabelle delle Z-Trasformate

$f(t)$	$\mathcal{L}[s]$	Trasformata $\mathcal{Z}$	Trasformata $\mathcal{Z}$ modificata
$t^k e^{-at}$	$\dfrac{k!}{(s+a)^{k+1}}$	$(-1)^k \dfrac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(-1)^k \dfrac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$\dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$t-\dfrac{1-e^{-at}}{a}$	$\dfrac{a}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$	$\dfrac{T}{(z-1)^2}+\dfrac{amT-1}{a(z-1)}+\dfrac{e^{-amT}}{a(z-e^{-aT})}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\dfrac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-aT}}-\dfrac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\dfrac{1}{z-1}-\left[\dfrac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\dfrac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$	$\dfrac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\dfrac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\dfrac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\dfrac{z\sin amT+\sin(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\dfrac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\dfrac{z\cos amT-\cos(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$

La Z-trasformata

- La Z-trasformata X(z) e la sequenza corrispondente x(k) sono legate da una corrispondenza biunivoca
- Questo non avviene tra una X(z) e la sua “inversa” x(t)
- Data una X(z) si possono avere molte x(t) (Teorema di Shannon)



- **Linearità**

$$x(k) = a\,f(k) + b\,g(k) \quad \Rightarrow \quad X(z) = a\,F(z) + b\,G(z)$$

- **Moltiplicazione per a^{k}.** Siano X(z) la Z-trasformata di x(t) e *a* una costante. La Z-trasformata di a^k x(k) e\` data da X(a^{-1} z):

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1} z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a^k x(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1} z)^{-k} \\ &= X(a^{-1} z) \end{aligned}$$

Teorema della traslazione nel tempo

Se x(t) = 0, t<0, X(z) = Z[x(t)] e n = 0, 1, 2, ...

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}X(z)$$ ritardo

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$ anticipo

Operativamente:

$$\begin{aligned} z^{-1}x(k) &= x(k-1) \\ z^{-2}x(k) &= x(k-2) \\ zx(k) &= x(k+1) \end{aligned}$$

- **Teorema del valore iniziale**

  Se X(z) = Z[x(t)] ed esiste $\lim_{z\to\infty} X(z)$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Infatti si noti che

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

- **Teorema del valore finale**

  Siano tutti i poli di X(z) entro al cerchio unitario, con al piu` un polo semplice in z =1

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1})X(z)\right]$$

- Esempio: Si consideri il segnale descritto da

$$X(z) = \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} x(kT) &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{T(z+1)}{2(z-0.5)} \\
&= 2T
\end{aligned}$$

X(kT) = 0, 0.5000, 1.2500, 1.6250, 1.8125, 1.9063, 1.9531, 1.9766, 1.9883,
1.9941, 1.9971, 1.9985, 1.9993, 1.9996, 1.9998, 1.9999, 2.0000, 2.0000, ...
(T = 1 sec)

Differenziazione complessa

$$\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-k)x(k)z^{-k-1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}[k\,x(k)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Z}[k^m\,x(k)] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)$$

- Esempio: gradino unitario

$$\mathcal{Z}[h(k)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

- La Z-trasformata del segnale rampa unitaria x(kT) = kT, k = 0, 1, 2, ..., e`

$$\mathcal{Z}[x(k)] = \mathcal{Z}[kT] = \mathcal{Z}[kT\,h(k)] = -Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Integrazione complessa

Si consideri la sequenza

$$g(k) = \frac{x(k)}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^\infty \frac{X(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \lim_{k \to 0} \frac{x(k)}{k}$$

Trasformazione di funzioni periodiche

Sia data una successione $x_p(k)$ periodica di periodo pT e sia x(k) la successione dei campioni relativi al primo periodo e nulla per k>p

$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & k = 0, 1, 2, \ldots, p \\ 0 & k > p \end{cases}$$

Se X(z) è la Z-trasformata di x(k), allora:

$$\mathcal{Z}[x_p(k)] = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} X(z)$$

- **Teorema della convoluzione reale**

- **Teorema della convoluzione complessa**

- **Teorema di Parseval**

Analoghi a quelli visti per la trasformata di Laplace

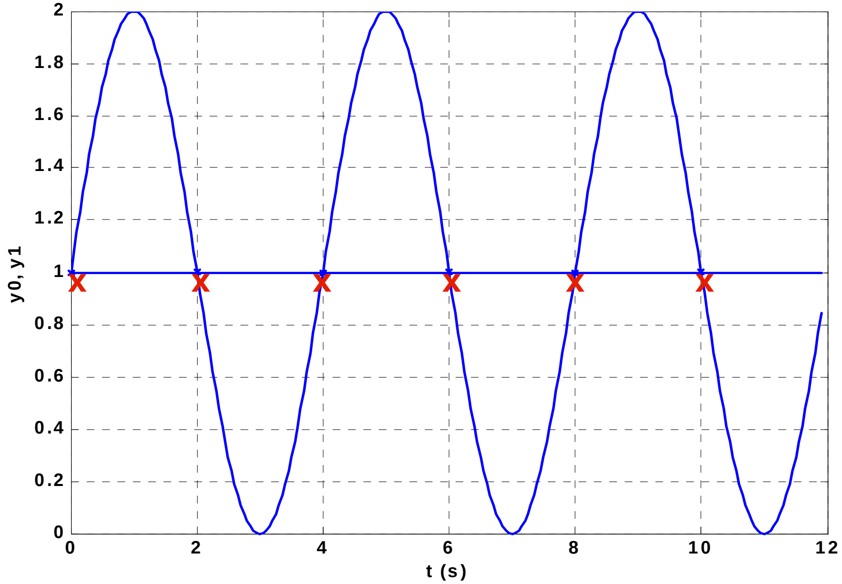
La antitrasformata Z

- Permette di passare da una Z-trasformata X(z) alla corrispondente sequenza x_k e possibilmente alla funzione continua x(t) cui corrisponde per campionamento la sequenza x_k

$$X(z) \longleftrightarrow x(k) \longleftrightarrow x(t)$$

Biunivoca *Non biunivoca*

- Se e` soddisfatto il Teorema di Shannon sul campionamento, la funzione continua x(t) può essere determinata univocamente a partire dalla sequenza x_k.



La antitrasformata Z

- Diversi metodi per antitrasformare una funzione X(z)

  1) Metodo della lunga divisione
  2) Metodo computazionale
  3) Metodo della scomposizione in fratti semplici
  4) Metodo dell'integrale di inversione

Metodo della lunga divisione

Con questa tecnica si espande la X(z) in una serie di potenze in z^{-1}. Il metodo viene applicato quando non si riescono a trovare espressioni in forma chiusa per x(k) e nel caso in cui si sia interessati a ricavare solo un numero finito di termini di x(k).

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = x(0) + x(T) z^{-1} + \cdots + x(kT) z^{-k} + \cdots$$

Si divide per il polinomio a denominatore con la regola di Euclide

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-1} + \cdots$$

da cui si ricava

$$x(0) = c_0, \qquad x(T) = c_1, \qquad x(2T) = c_2, \qquad \cdots$$

La antitrasformata Z

- Esempio:

$$X(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})^2(1-0.5\,z^{-1})} = \frac{6}{2-5\,z^{-1}+4\,z^{-2}-z^{-3}}$$

$$\begin{array}{lllll|l}
6 & & & & & 2-5z^{-1}+4z^{-2}-z^{-3} \\ \hline
6 & -15z^{-1} & +12z^{-2} & -3z^{-3} & & 3+7.5z^{-1}+12.75z^{-2}+ \\
 & +15z^{-1} & -12z^{-2} & +3z^{-3} & & +18.375z^{-3}+\dots \\
 & +15z^{-1} & -37.5z^{-2} & +30z^{-3} & -7.5z^{-4} & \\
 & & +25.5z^{-2} & -27z^{-3} & +7.5z^{-4} & \\
 & & +25.5z^{-2} & -63.75z^{-3} & +51z^{-4} \quad -12.75z^{-5} & \\
 & & & +36.75z^{-3} & -43.5z^{-4} \quad +12.75z^{-5} &
\end{array}$$

$$X(z) = 3 + 7.5\,z^{-1} + 12.75\,z^{-2} + 18.375\,z^{-3} + \cdots$$

$$x(0)=3, \qquad x(1)=7.5, \qquad x(2)=12.75, \qquad x(3)=18.375, \qquad \cdots$$

- **Metodo della scomposizione in fratti semplici**

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \qquad m \leq n$$

- **Caso 1:** tutti i poli sono semplici

$$X(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z - p_i}$$

I coefficienti c_i (residui) sono dati da:

$$\begin{aligned} c_i &= \left[(z - p_i) X(z)\right]_{z=p_i} \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \\ &= \frac{B(p_i)}{(p_i - p_1) \ldots (p_i - p_{i-1})(p_i - p_{i+1}) \ldots (p_i - p_n)} \end{aligned}$$

La antitrasformata Z

- Se in X(z) vi e` almeno uno zero nell'origine, si usa X(z)/z:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n}, \qquad c_i = \left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

- Quando sono presenti poli complessi coniugati, i coefficienti c_i sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche a coefficienti reali. L'espressione finale cercata e` quindi del tipo

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i^k$$

La antitrasformata Z

- **Caso 2:** vi sono poli multipli in X(z) o in X(z)/z

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2}\cdots(z-p_h)^{r_h}}$$

- Si puo` porre:

$$X(z) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z-p_i)^{r_i-k+1}}$$

con

$$c_{ik} = \left[\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-p_i)^{r_i} X(z)\right]_{z=p_i}, \qquad i=1,\ldots,h;\; k=1,\ldots,r_i$$

La antitrasformata Z

- Esempio: Calcolare l'antitrasformata della funzione

$$X(z) = \frac{2z^2 - 1.6z}{z^2 - 1.6z + 0.6}$$

- I due poli risultano $z_1 = 1$ e $z_2 = 0.6$. Inoltre, la X(z) puo` essere scritta come

$$X(z) = \frac{z(2z - 1.6)}{(z-1)(z-0.6)}$$

- Si utilizza quindi la X(z)/z

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-0.6} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-0.6}$$

da cui

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.6}$$

- Dalle tabelle si ha quindi che

$$x(k) = 1 + 0.6^k \qquad x(0) = 2, \;\; x(1) = 1.6, \;\; x(2) = 1.36, \;\; x(3) = 1.216, \;\; \ldots$$

La antitrasformata Z

- Esempio: Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2.7z^{-1} + 2.4z^{-2} - 0.7z^{-3}} = \frac{z}{z^3 - 2.7z^2 + 2.4z - 0.7}$$

- Si ha che

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - 0.7} + \frac{c_{21}}{(z-1)^2} + \frac{c_{22}}{z-1}$$

$$c_1 = \left[(z - 0.7)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.7} = 11.111$$

$$c_{21} = \left[(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = 3.333 \qquad c_{22} = \left[\frac{d}{dt}(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = -11.111$$

e quindi

$$X(z) = \frac{11.111z}{z - 0.7} + \frac{3.333z}{(z-1)^2} - \frac{11.111z}{z-1}$$

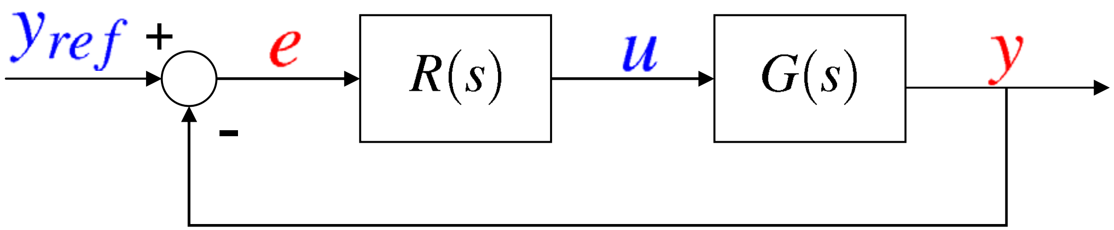
e

$$x(k) = 11.111(0.7)^k + 3.333k - 11.111$$

Appendice B

- *Soluzione di equazioni differenziali e di equazioni alle differenze*

Modellistica dei Sistemi a Tempo Continuo



- Si consideri il regolatore tempo continuo:

$$U(s) = R(s)E(s)$$

- Tale espressione rappresenta, nel dominio delle trasformate di Laplace, l'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti che esprime la relazione dinamica tra la legge di controllo $u(t)$ ed il segnale errore $e(t)$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} u(t) \;=\; \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} e(t)$$

Soluzione di equazioni differenziali lineari

- Supponiamo che il segnale di controllo $u(t)$ sia descritto dall'equazione **autonoma** (in quanto $u(t)$ non dipende dall'ingresso $e(t)$):

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t)$$

- Premoltiplicando entrambi i membri dell'equazione per il termine e^{-t} si ottiene:

$$e^{-t}\dot{u}(t) - e^{-t}u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[e^{-t}u(t)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-t}u(t) = c$$

- Da cui si deduce che tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale di partenza sono del tipo:

$$u(t) = ce^{t}$$

- Ove c è una costante dipendente dalle condizioni iniziali

Soluzione di equazioni differenziali lineari

- In generale, un'equazione differenziale lineare autonoma del primo ordine sarà del tipo:

$$\dot{u}(t) - au(t) = 0$$

- E la relativa soluzione generale risulta:

$$u(t) = ce^{at}$$

- È possibile introdurre l'equazione caratteristica associata:

$$s - a = 0$$

la quale consente di calcolare il coefficiente *a* che, nella funzione esponenziale, moltiplica *t*

Soluzione di equazioni differenziali lineari

- Consideriamo ora una equazione del secondo ordine:

$$\ddot{u}(t) + a_1\dot{u}(t) + a_0 u(t) = 0$$

- Introducendo la variabile ausiliaria:

$$\phi(t) = \dot{u}(t)$$

- È possibile riscrivere l'equazione del secondo ordine in un sistema di due equazioni del primo ordine:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ u \end{bmatrix}$$

- È quindi del tutto evidente che, per la linearità, la soluzione generale dell'equazione del secondo ordine, sarà fornita dalla combinazione lineare una coppia qualunque di soluzioni particolari $u_1(t)$ *e* $u_2(t)$

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

Soluzione di equazioni differenziali lineari

- Consideriamo ora una equazione del secondo ordine:

$$\ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_0 u(t) = 0$$

- Per la linearità, l'integrale generale sarà fornito dalla combinazione lineare di due soluzioni indipendenti $u_1(t)$ e $u_2(t)$:

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = 0 \iff c_1 = c_2 = 0$$

- In analogia con quanto accade nel caso dell'equazione del primo ordine, anche qui le soluzioni particolari sono del tipo:

$$u_1(t) = e^{s_1 t} \qquad u_2(t) = e^{s_2 t}$$

- con s_1, s_2 radici dell'eq. caratteristica:

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

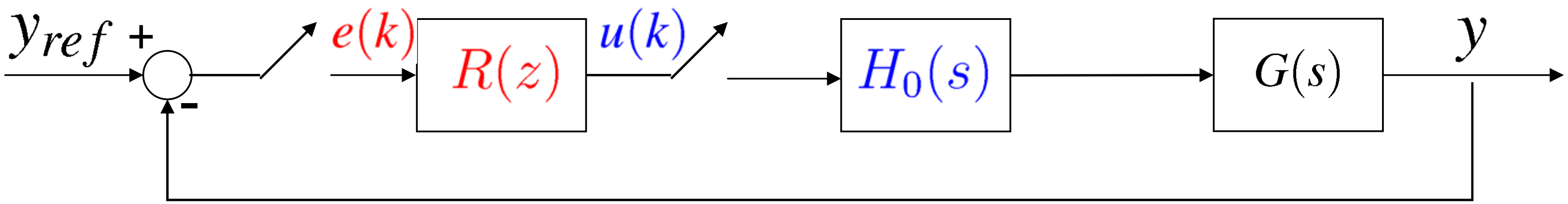
Soluzione di equazioni differenziali lineari

- Si noti infine la proprietà fondamentale degli integrali particolari di una ED del secondo ordine:

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= e^{s_1 t} \\
\dot{u}_1(t) &= s_1 e^{s_1 t} = s_1 u_1(t) \\
\ddot{u}_1(t) &= s_1^2 e^{s_1 t} = s_1^2 u_1(t) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- L'evoluzione dei sistemi a dati campionati, descritti da equazioni lineari alle differenze, possiede proprietà analoghe a quelle viste sinora per le equazioni differenziali lineari.

Modellistica dei Sistemi a Tempo Discreto



- Per mezzo della Z-trasformata, il regolatore tempo-discreto può essere rappresentato come:

$$U(z) = R(z)E(z)$$

- Oppure, mediante equazioni alle differenze finite, la relazione dinamica tra la legge di controllo *u(k)* ed il segnale errore *e(k)* è rappresentabile come:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \nabla^k u(k) = \sum_{k=0}^{m} b_k \nabla^k e(k)$$

$$\nabla u_k = u_k - u_{k-1}, \qquad \nabla^2 u_k = \nabla u_k - \nabla u_{k-1}, \qquad \dots$$

Soluzione di equazioni alle differenze

- Consideriamo l'equazione differenziale: $\dot{u}(t) = u(t)$
- Ovvero: $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = u(t)$$
- Se il periodo di campionamento T è sufficientemente piccolo, la derivata può essere riscritta come:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \simeq \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T}$$

- Quindi, trascurando la divisione per la costante T, l'equazione alle differenze corrispondente all'ED di partenza è:

$$\nabla u_k = u_{k-1}$$

Soluzione di equazioni alle differenze

- Consideriamo quindi: $$\nabla u_k = u_{k-1}$$

- Premoltiplicando entrambi i membri dell'equazione per il termine 2^{-k} si ottiene: $$2^{-k}\nabla u_k - 2^{-k}u_{k-1} = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla\left[2^{-k}u_k\right] &= 2^{-k}\nabla u_k + u_{k-1}\nabla 2^{-k} = \\ &= 2^{-k}\nabla u_k + u_{k-1}\left[2^{-k} - 2^{-(k-1)}\right] = \\ &= 2^{-k}\nabla u_k - 2^{-k}u_{k-1} = 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\left[x_k y_k\right] &= x_k y_k - x_{k-1}y_{k-1} = \\ &= x_k\nabla y_k + y_{k-1}\nabla x_k = \\ &= y_k\nabla x_k + x_{k-1}\nabla y_k\end{aligned}}$$

$$2^{-k}u_k = c \quad \Rightarrow \quad u_k = c\,2^k$$

- c è una costante dipendente dalle condizioni iniziali

Soluzione di equazioni differenziali lineari

- In generale, un'equazione alle differenze lineare autonoma del primo ordine sarà del tipo:

$$\nabla u_k - a u_{k-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_k - (a+1)u_{k-1} = 0$$

e la relativa soluzione generale risulta:

$$u_k = c(a+1)^k$$

- È possibile introdurre l'equazione caratteristica associata:

$$z - (a+1) = 0$$

- Consente di calcolare la base della funzione esponenziale in k

Soluzione di equazioni differenziali lineari

- Consideriamo ora una equazione del secondo ordine:

$$\nabla^2 u_k + a_1 \nabla u_k + a_0 u_k = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 + a_1 + a_0)u_k - (2 + a_1)u_{k-1} + u_{k-2} = 0$$

- Per la linearità, la soluzione generale sarà fornita dalla combinazione lineare di due soluzioni **indipendenti** $u_1(k)$ e $u_2(k)$:

$$u(k) = c_1 u_1(k) + c_2 u_2(k)$$

- In analogia con quanto accade nel caso dell'equazione del primo ordine, anche qui le soluzioni particolari sono del tipo:

$$u_1(k) = z_1^k \qquad\qquad u_2(k) = z_2^k$$

- con z_1, z_2 radici dell'eq. caratteristica:

$$(1 + a_1 + a_0)z^2 - (2 + a_1)z + 1 = 0$$

- Si noti infine la proprietà fondamentale delle soluzioni di una equazione alle differenze lineare a coefficienti costanti:

$$
\begin{aligned}
u(k) &= z^k \\
\nabla u(k) &= z^k - z^{k-1} = \left(1 - z^{-1}\right) u(k) \\
\nabla^2 u(k) &= \nabla z^k - \nabla z^{k-1} = \left(1 - z^{-1}\right)^2 u(k) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- In analogia con quanto accade nel caso tempo-continuo

CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

INTRODUZIONE AL CONTROLLO DIGITALE - FINE

Prof. Claudio Melchiorri

DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093034

e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri