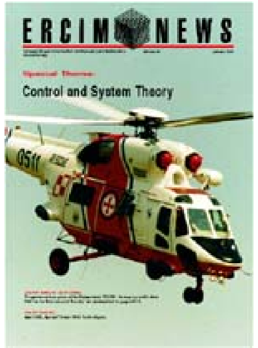
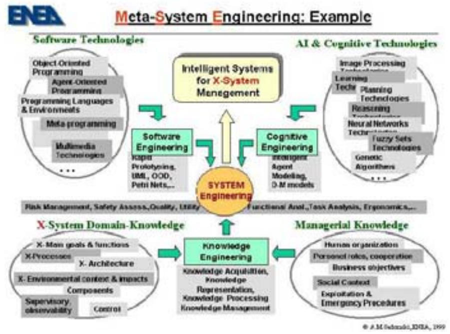
CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

SISTEMI E MODELLI

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/~cmelchiorri

Sistemi e Modelli

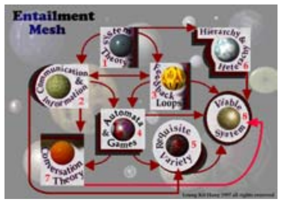




Da diversi anni, i termini:

- "Sistema",
- "Teoria dei Sistemi",
- "Ingegneria dei Sistemi"
- …

sono divenuti di uso corrente in campi e discipline anche molto diverse: controllo dei processi, elaborazione dati, biologia, economia, ecologia, gestione aziendale, gestione traffico, …

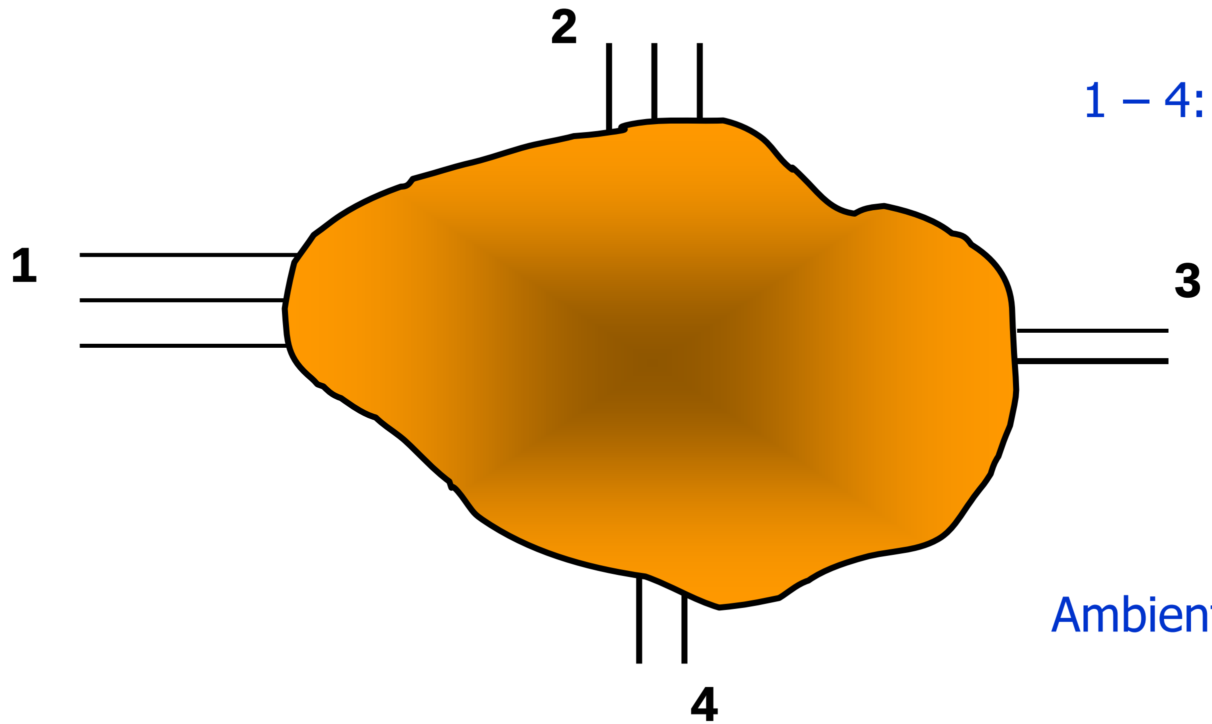


Sistema: "elemento" comune in questa terminologia

⇒ Necessità di definire e studiare le *proprietà strutturali* dei "sistemi"

- **Sistema:**

  insieme, isolato artificialmente dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comportamento



1 – 4: collegamenti

Ambiente esterno

Sistema:

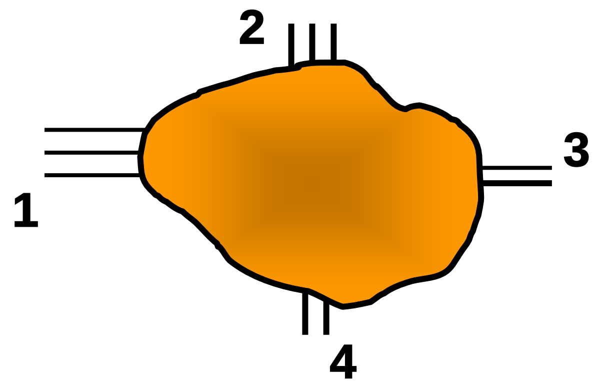
L'evoluzione di un sistema nel tempo si manifesta attraverso la variazione di un certo numero di attributi misurabili

Attributo misurabile:

Caratteristica che può essere posta in relazione con uno o più numeri interi, reali o complessi o semplicemente con un insieme di simboli

Modello matematico:

Riproduzione con equazioni delle relazioni intercorrenti tra i diversi attributi misurabili (variabili) del sistema.



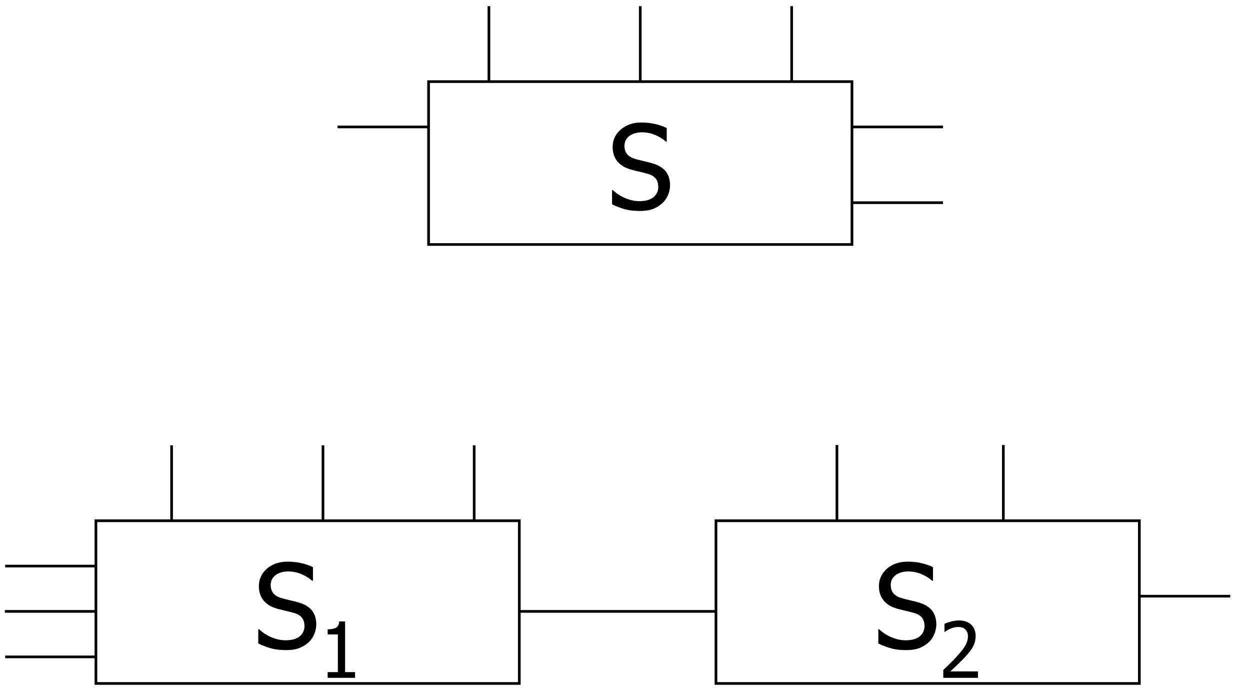
Sistemi e Modelli

- Lo studio di un sistema e delle sue proprietà è basato su di un *modello matematico* (anche se sono utilizzabili altri tipi di modelli) che descrive, con *una certa approssimazione*, le relazioni che intercorrono tra le diverse variabili del sistema.

- Ad uno stesso sistema si possono associare più modelli, in dipendenza del tipo di rappresentazione desiderato, alla precisione e alla semplicità desiderate.

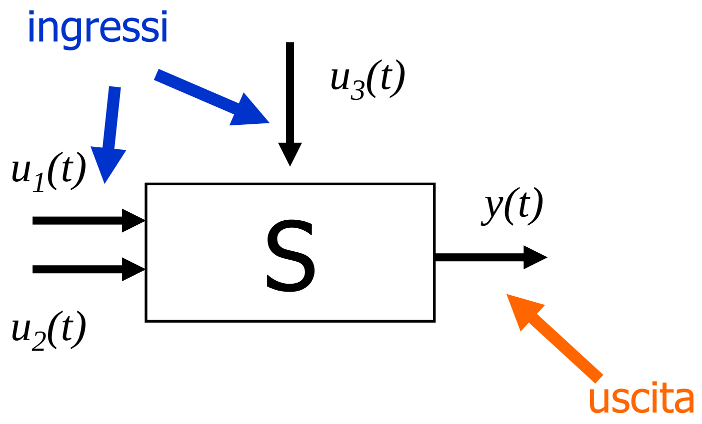
- Oggetto della *Teoria dei Sistemi* è lo studio dei modelli matematici dei sistemi e dei problemi connessi con la loro deduzione ed utilizzazione.

- Un sistema viene rappresentato graficamente con un *blocco*, e le sue variabili mediante collegamenti con l'*ambiente esterno* o con altri sistemi.

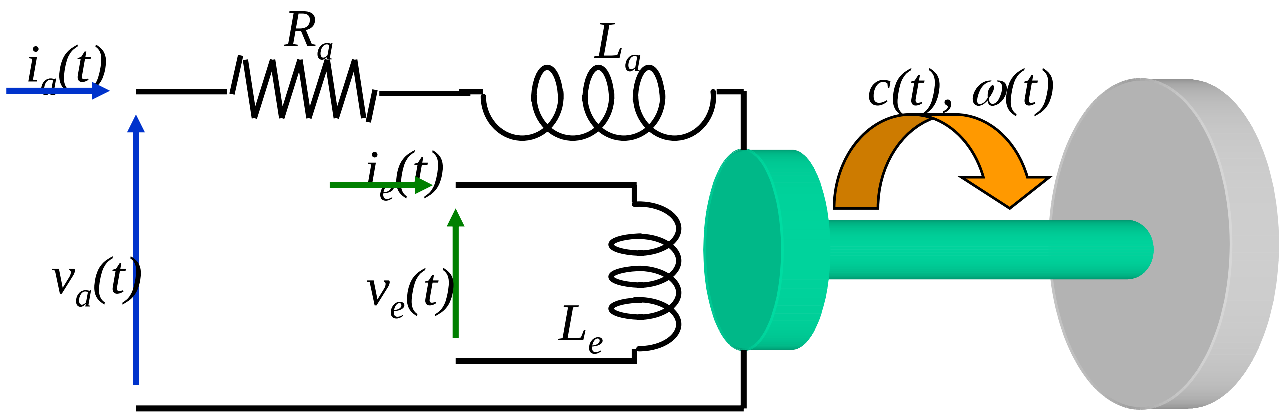


Sistemi e Modelli

- Un sistema *orientato* è un sistema in cui le variabili sono suddivise in
  - Variabili di ingresso (cause)
  - Variabili di uscita (effetti)



- Non sempre la suddivisione tra ingressi ed uscite (cause ed effetti) è univoca



Si considerano due tipi di sistemi:

1. *Sistemi statici o privi di memoria*

   modello matematico dei sistemi statici:

   - equazioni algebriche - l'uscita del sistema dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante (relazione tra tensione e corrente in un resistore)

2. *Sistemi dinamici o con memoria*

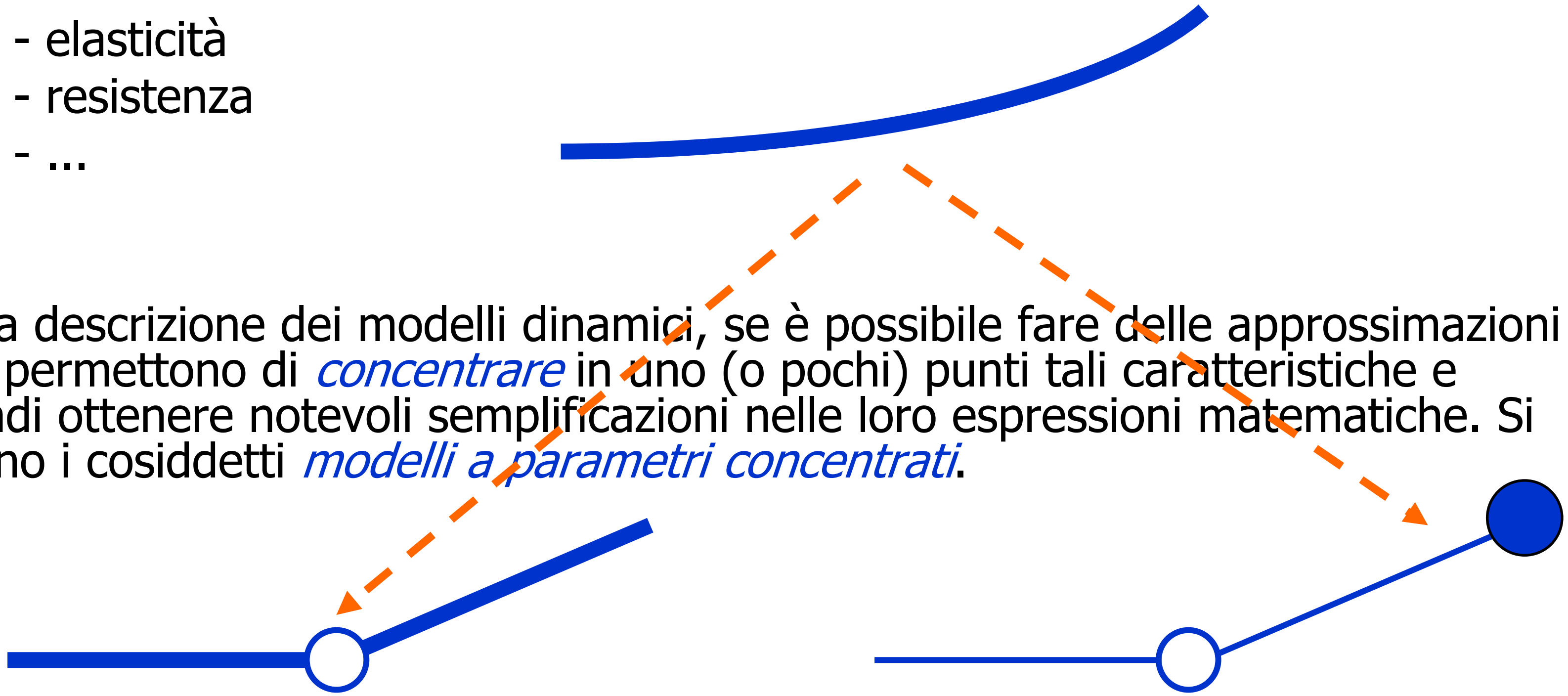
   modello matematico dei sistemi dinamici *(a parametri concentrati):*

   - equazioni differenziali - l'uscita del sistema non dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante, ma anche da quelli passati (relazione tra tensione e corrente in un condensatore)
   - concetto di *stato*

Modelli a parametri concentrati

- Le caratteristiche fisiche dei sistemi dinamici sono *distribuite* nel sistema fisico stesso:
  - \- massa
  - \- elasticità
  - \- resistenza
  - \- ...

- Nella descrizione dei modelli dinamici, se è possibile fare delle approssimazioni che permettono di *concentrare* in uno (o pochi) punti tali caratteristiche e quindi ottenere notevoli semplificazioni nelle loro espressioni matematiche. Si hanno i cosiddetti *modelli a parametri concentrati*.



- Nella pratica, anche se è chiaro che tutte le caratteristiche dei sistemi fisici sono *distribuite*, si cerca ove possibile di avere modelli a parametri concentrati.

Modelli a parametri concentrati

- I modelli a parametri concentrati sono espressi da equazioni differenziali ordinarie (tempo continuo) o equazioni alle differenze (tempo discreto), che sono funzioni solo del tempo:

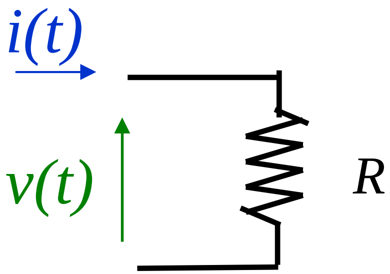
$$a_m \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + \ldots + b_0 u$$

$$a_m y(mT) + a_{m-1} y((m-1)T) + \ldots + a_1 y(T) = b_n u(nT) + \ldots + b_1 u(T)$$

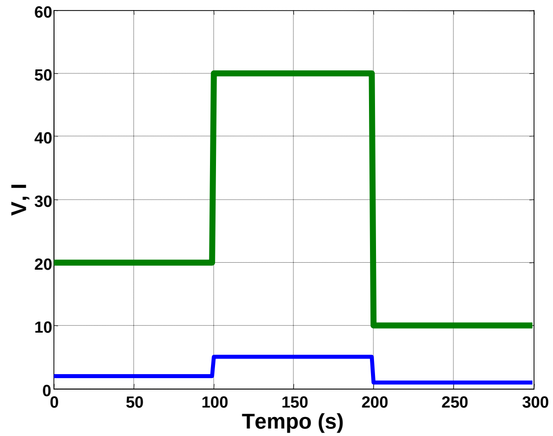
- Se non è possibile considerare come concentrati alcuni dei parametri del modello, allora si deve ricorrere a equazioni alle differenze parziali. Infatti, la dinamica in questo caso non dipende solo dal tempo ma anche, per esempio, dallo spazio:

$$a_m \frac{\partial^m y}{\partial t^m} + a_{m-1} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial t^{m-1}} + \ldots + a_p \frac{\partial^p y}{\partial x^p} + a_{p-1} \frac{\partial^{p-1} y}{\partial x^{p-1}} + \ldots + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + \ldots + b_0 u$$

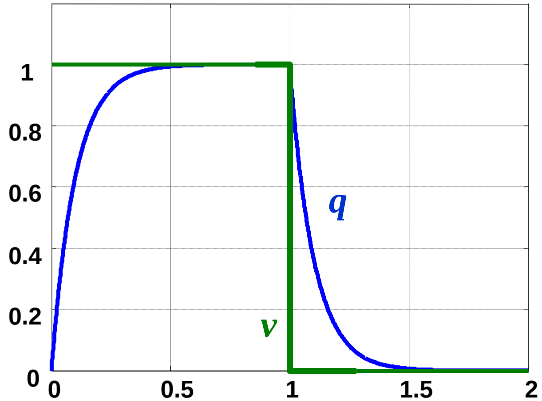
- Sistema statico (algebrico)

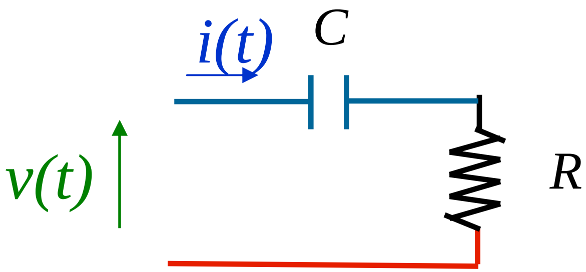


$$v(t) = R\, i(t)$$



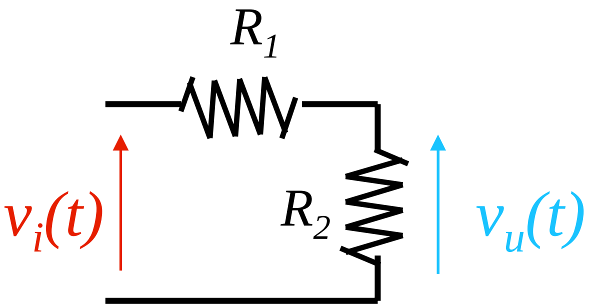
- Sistema dinamico





$$v(t) = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$$

- *Rete elettrica resistiva*



$$v_u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

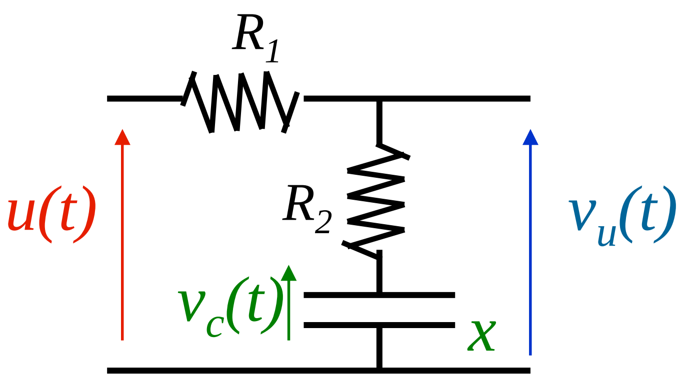
- *Rete combinatoria*

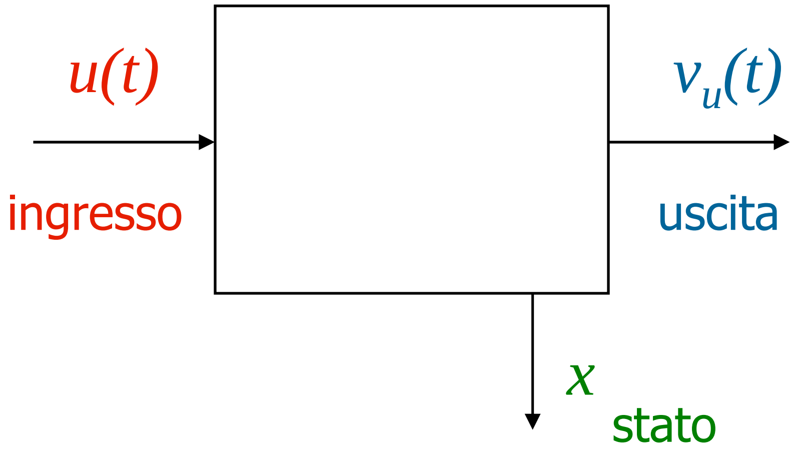
u_1	u_2	u_3	**y**
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

Gli ingressi u_i potrebbero rappresentare le posizioni di tre interruttori e l'uscita y l'accensione di una lampada

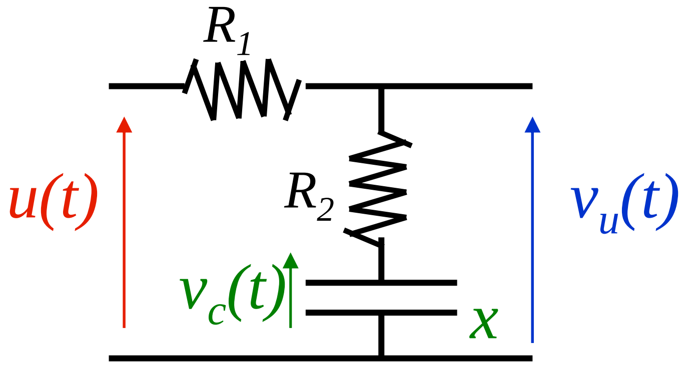
- ***Sistemi dinamici:*** dotati di memoria. I valori dell'uscita, in un dato istante, dipendono ***anche*** dalla evoluzione degli ingressi negli istanti precedenti (storia – memoria).

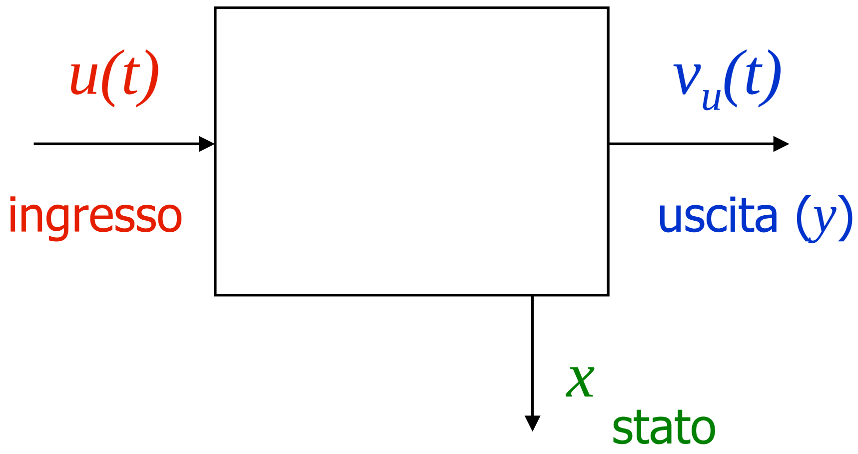
- *Rete elettrica con elementi che accumulano energia* (capacità e/o induttanze)





- *Rete elettrica con elementi che accumulano energia* (capacità e/o induttanze)





- Si ha:

$$C\dot{x}(t) = \frac{u(t) - x(t)}{R_1 + R_2} \longrightarrow \dot{x}(t) = -\frac{1}{C(R_1+R_2)}x(t) + \frac{1}{C(R_1+R_2)}u(t)$$

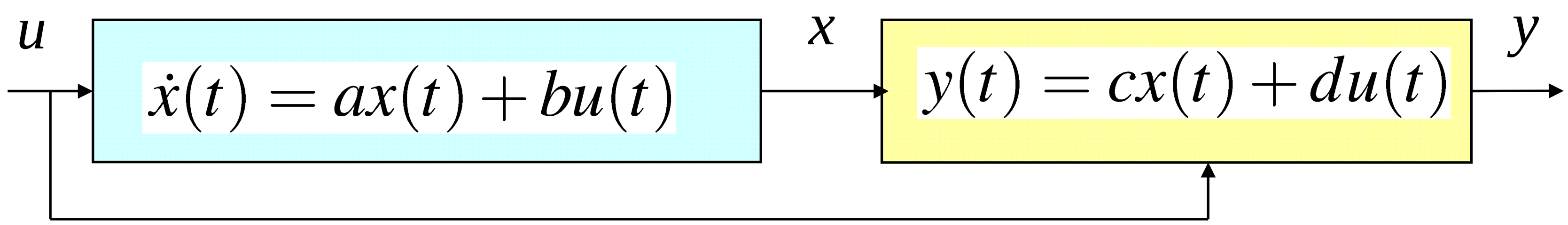
$$y(t) = \frac{u(t) - x(t)}{R_1 + R_2}R_2 + x(t) \longrightarrow y(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2}x(t) + \frac{R_2}{R_1+R_2}u(t)$$

- In definitiva si hanno **due equazioni**, una differenziale ed una algebrica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

Funzione di velocità di transizione dello stato

Funzione di uscita



- In definitiva si hanno **due equazioni**, una differenziale ed una algebrica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

Funzione di velocità di transizione dello stato

Funzione di uscita

- In generale la soluzione dell'eq. differenziale può essere molto difficile. Per una certa categoria di sistemi (*sistemi lineari tempo continui a parametri concentrati*) si ha che, dato $x(0) = x_0$ (valore dello stato per t =0):

$$x(t) = x_0\, e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\ d\,\tau$$

Funzione di transizione dello stato

$$y(t) = c\left(x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\ d\,\tau\right) + d\,u(t)$$

- La formula

$$x(t) = x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\ d\tau$$

valida anche nel caso vettoriale, viene detta ***Formula di Lagrange***

- Si ricava dalla regola di calcolo della derivata di un integrale dipendente da parametri

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx = f(\beta(t),t)\dot{\beta} - f(\alpha(t),t)\dot{\alpha} + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

con $\alpha(t) = 0;\ \ \beta(t) = t;\ \ x = t;\ \ f(x,t) = e^{a(t-\tau)}\,b\,u(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a x_0 e^{at} + bu(t) + \int_0^t a\, e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\ d\tau \\ &= ax(t) + bu(t) \end{aligned}$$

I principali *problemi di analisi* della Teoria dei Sistemi sono:

- *Analisi del moto o della risposta*: determinazione del moto o della funzione di uscita, dati lo stato iniziale e la funzione di ingresso

- *Analisi della controllabilità*: possibilità di influire sul moto o sulla funzione di uscita agendo sulla funzione di ingresso

- *Analisi dell'osservabilità*: possibilità di determinare lo stato in un dato istante, note le funzioni di ingresso e di uscita

- *Analisi della sensitività*: influenza sul moto o sulla funzione di uscita di variazioni dello stato iniziale, della funzione di ingresso e dei parametri del sistema

- *Analisi della stabilità*: proprietà che a variazioni limitate dello stato iniziale o della funzione di ingresso corrispondano variazioni limitate del moto e della funzione di uscita.

I principali *problemi di sintesi* della Teoria dei Sistemi sono:

- *Sintesi dell'ingresso*: determinazione di una funzione di ingresso che, a partire da un dato *stato iniziale*, origini un moto o una funzione di uscita con caratteristiche "desiderate"

- *Sintesi dell'ingresso e dello stato iniziale*: determinazione di una funzione di ingresso e di uno stato iniziale corrispondenti ad un moto o ad una funzione di uscita con caratteristiche "desiderate"

- *Sintesi di un dispositivo di controllo*: realizzazione di un dispositivo che, collegato al sistema in modo opportuno, dia luogo ad un sistema complessivo con determinate caratteristiche in relazione alla risposta, controllabilità, stabilità, sensibilità ai disturbi, …

- Concetto di *stato* di un sistema dinamico.

  Lo stato è l'informazione che occorre in ogni istante della "situazione interna" di un sistema dinamico per potere predire l'effetto della storia passata del sistema stesso sul suo comportamento futuro

- Nei sistemi fisici la "situazione interna" è tipicamente determinata da accumuli di energia, di quantità di moto o di massa e perciò può essere opportuno scegliere come variabili di stato quelle variabili da cui questi accumuli dipendono (es. nei circuiti elettrici le tensioni ai capi di condensatori o delle induttanze, nei sist. meccanici le posizioni o velocità di masse)

- Le variabili e le equazioni di stato **NON** sono definite in modo univoco!

Considerazioni energetiche

In ogni dominio fisico (escluso quello termico) esistono due parametri che caratterizzano, ciascuno, un diverso meccanismo di accumulo dell'energia:

- elettrico
  - Capacità (C) e Induttanza (L)
- meccanico traslante
  - Massa (M) e reciproco della rigidità longitudinale (1/K)
- meccanico rotante
  - Momento di inerzia (J) e reciproco della rigidità torsionale (1/K)
- fluidico (idraulico/pneumatico)
  - Capacità fluidica (C_f) e Induttanza fluidica (L_f)
- termico
  - Capacità termica (C_t)

Considerazioni energetiche

I due meccanismi elementari di accumulo della energia:

dominio	accumulo "capacitivo"	accumulo "induttivo"
elettrico	$E = \frac{1}{2} C v^2$	$E = \frac{1}{2} L i^2$
meccanico traslante	$E = \frac{1}{2} M v^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} f^2$
meccanico rotante	$E = \frac{1}{2} J \omega^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} c^2$
idraulico/pneumatico	$E = \frac{1}{2} C_f p^2$	$E = \frac{1}{2} L_f q^2$
termico	$E = C_t T$	manca

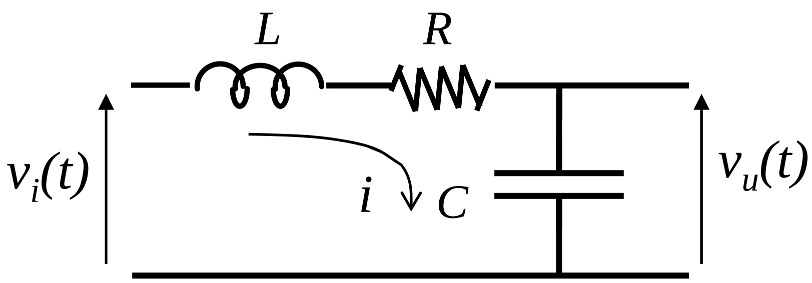
l'energia accumulata dipende dalle ⇒ **variabili ai morsetti** — **variabili passanti**

Le variabili ai morsetti sono in realtà differenze

Definizione

- Lo *stato* di un sistema dinamico Σ è:
  - un elemento di un insieme X, detto *insieme degli stati*,
  - soggetto a *variare nel tempo*,
  - con la proprietà che lo stato $x(t_0)$ in un istante t_0, unitamente al segmento della funzione di ingresso $u|_{[t0,t1]}$, *determina univocamente la funzione di uscita* $y|_{[t0,t1]}$

- Circuito RLC



Scelta della variabile di stato: variabile i cui valori sono legati ad accumuli di energia

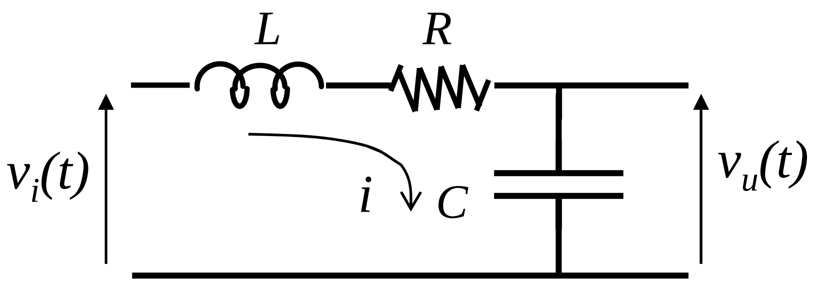
i	v_c

$$
\begin{aligned}
v_i(t) &= v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) \\
&= L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + v_C(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v_C(t) &= \frac{1}{C}i(t) \\
v_u(t) &= v_C(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}i(t) &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}v_C(t) + \frac{1}{L}v_i(t) \\
\frac{d}{dt}v_C(t) &= \frac{1}{C}i(t)
\end{aligned}
$$

- Circuito RLC



$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} i(t) &= -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{1}{L} v_i(t) \\
\frac{d}{dt} v_C(t) &= \frac{1}{C} i(t)
\end{aligned}
$$

$$x = \begin{bmatrix} i \\ v_C \end{bmatrix} \qquad u = v_i \qquad y = v_u \; (= v_C)$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A\, x(t) + B\, u(t) \\
y(t) &= C\, x(t) + D\, u(t)
\end{aligned}
}
$$

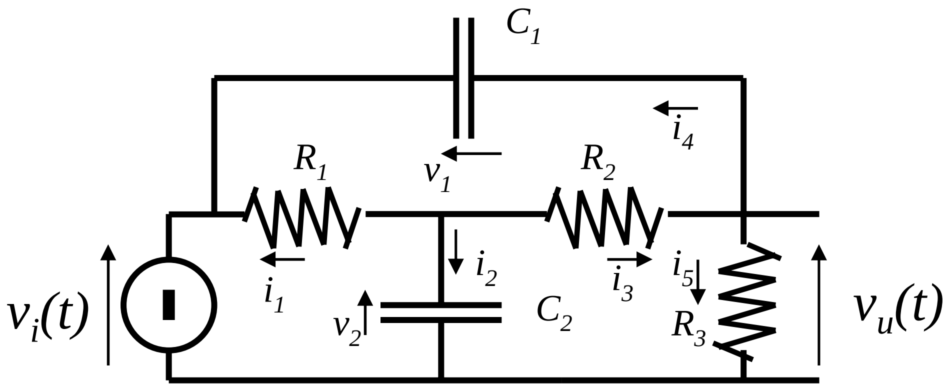
2 stati

1 uscita

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [0, \quad 1] \qquad D = [0]$$

Sistemi - Esempi

- Circuito elettrico a più maglie



$$\begin{aligned}\dot v_1 &= -\frac{1}{C_1} i_4(t)\\ i_4(t) &= i_3(t) - i_5(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot v_2 &= \frac{1}{C_2} i_2(t)\\ i_2(t) &= -(i_1(t) + i_3(t))\end{aligned}$$

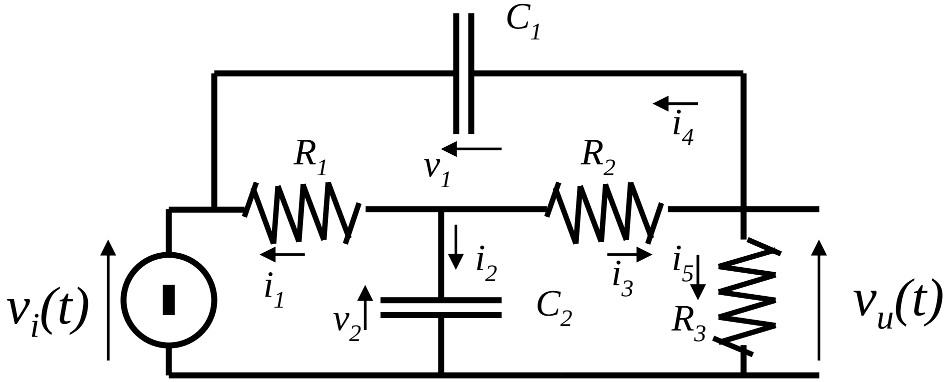
$$R_2\ i_3(t) = v_2(t) - [v_i(t) - v_1(t)] \qquad R_3\ i_5(t) = v_i(t) - v_1(t)$$

$$R_1\ i_1(t) = v_2(t) - v_i(t) \qquad v_u(t) = v_i(t) - v_1(t)$$

$$\begin{aligned}\dot v_1(t) &= -\frac{1}{C_1}\left(\frac{v_2 - (v_i - v_1)}{R_2} - \frac{v_i - v_1}{R_3}\right)\\ \dot v_2(t) &= -\frac{1}{C_2}\left(\frac{v_2 - v_i}{R_1} + \frac{v_2 - (v_i - v_1)}{R_2}\right)\end{aligned}$$

Sistemi - Esempi

- Circuito elettrico a più maglie



$$
\begin{aligned}
\dot v_1(t) &= -\frac{1}{C_1}\left(\frac{v_2-(v_i-v_1)}{R_2} - \frac{v_i - v_1}{R_3}\right)\\
\dot v_2(t) &= -\frac{1}{C_2}\left(\frac{v_2-v_i}{R_1} + \frac{v_2-(v_i-v_1)}{R_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad u = v_i, \quad y = v_u \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \dot x(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}
$$

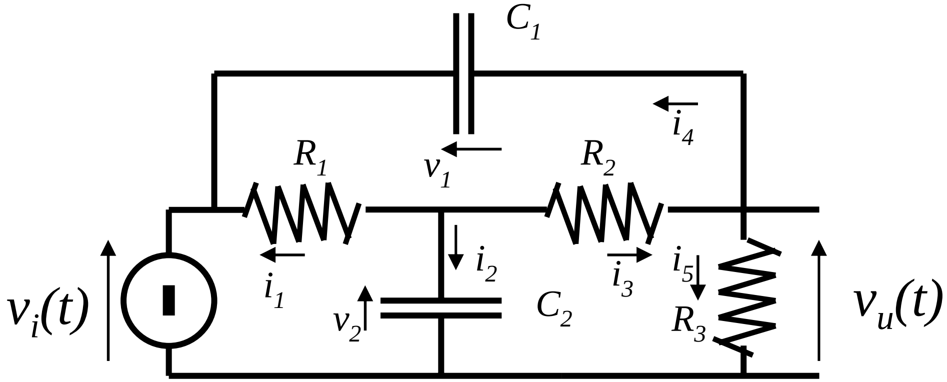
$$
A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{C_1R_2} \\ -\frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) \\ \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix}
$$

$$
C = [-1,\ 0] \qquad D = [1]
$$

2 stati

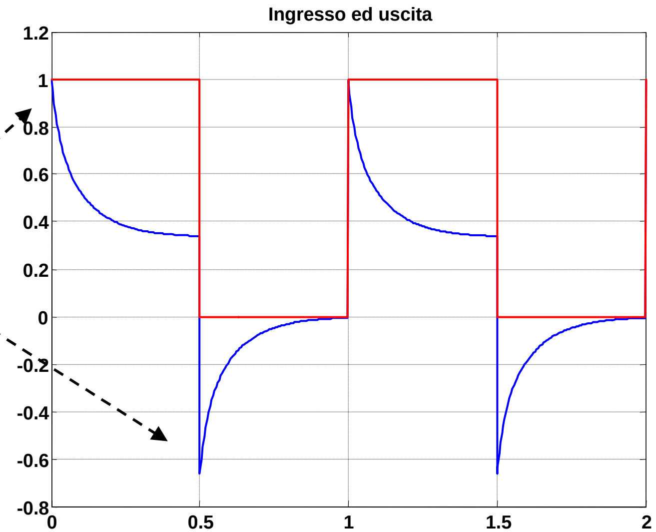
1 uscita

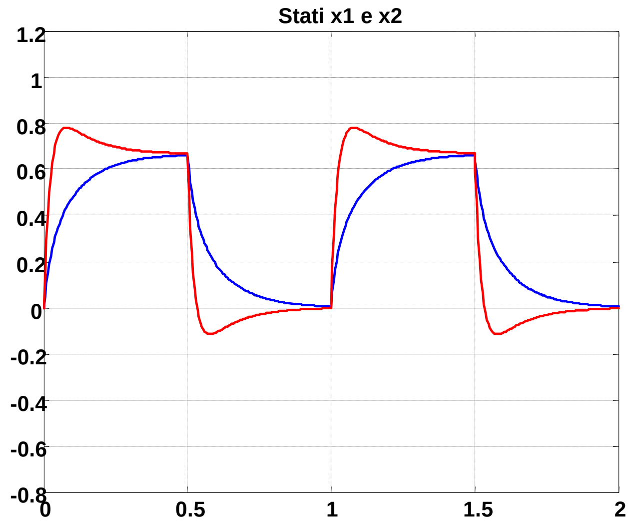
- Circuito elettrico a più maglie



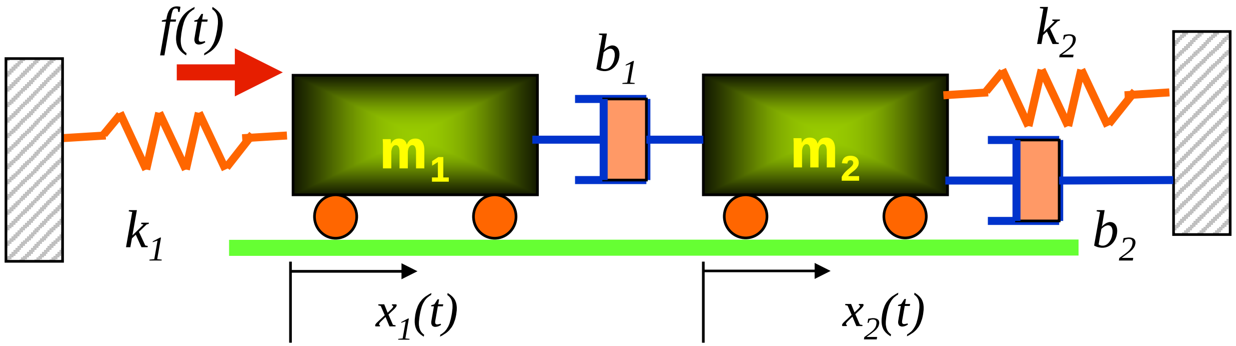
$$
\begin{aligned}
\dot v_1(t) &= -\frac{1}{C_1}\left(\frac{v_2-(v_i-v_1)}{R_2}-\frac{v_i-v_1}{R_3}\right)\\
\dot v_2(t) &= -\frac{1}{C_2}\left(\frac{v_2-v_i}{R_1}+\frac{v_2-(v_i-v_1)}{R_2}\right)
\end{aligned}
$$

Discontinuità sull'uscita dovute alla presenza del termine D





- Sistema meccanico



$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= v_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= v_2(t)\\
f(t) &= m_1\dot{v}_1 + k_1 x_1 + b_1(v_1 - v_2)\\
0 &= b_1(v_2 - v_1) + m_2\dot{v}_2 + k_2 x_2 + b_2 v_2
\end{aligned}
$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad u = f \qquad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

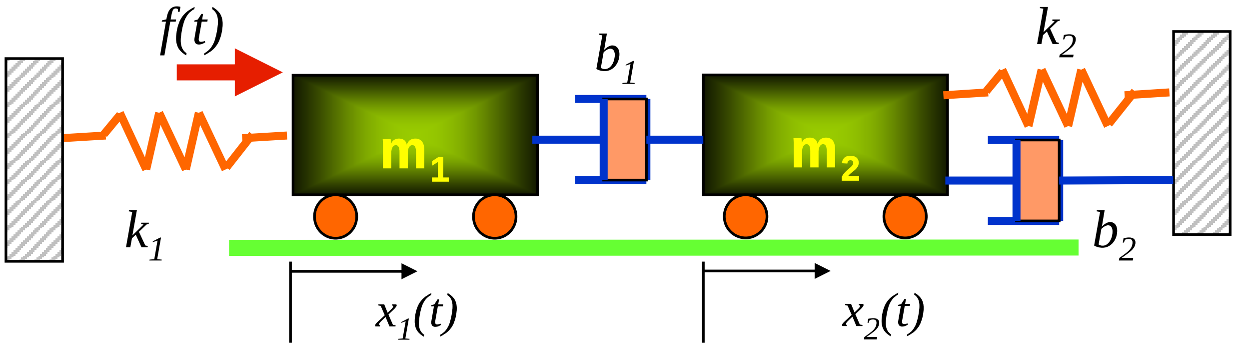
4 stati

2 uscite

Sistemi - Esempi

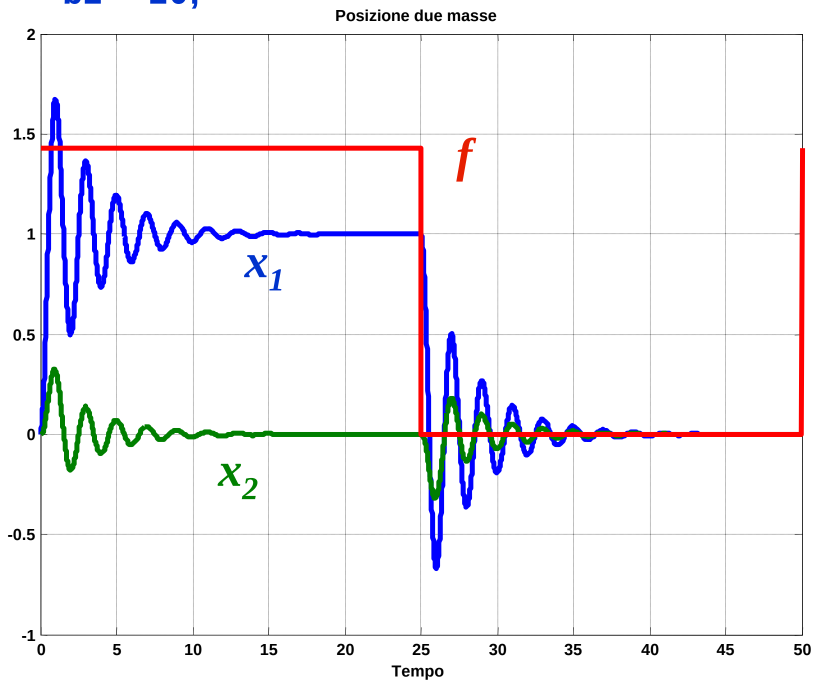
- Sistema meccanico

m1 = 10;
m2 = 5;
k1 = 100;
k2 = 50;

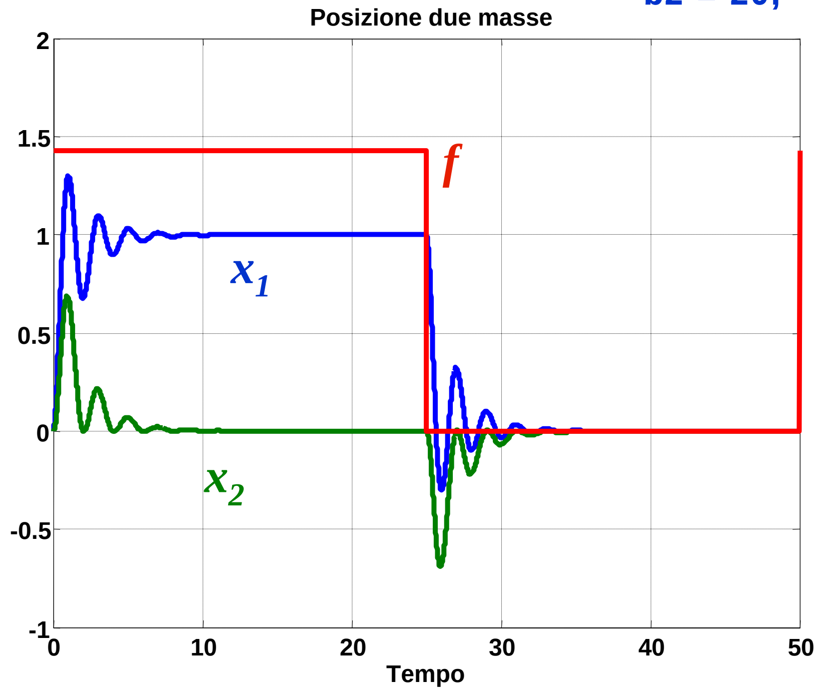


f = 100 N

b1 = 10;
b2 = 20;

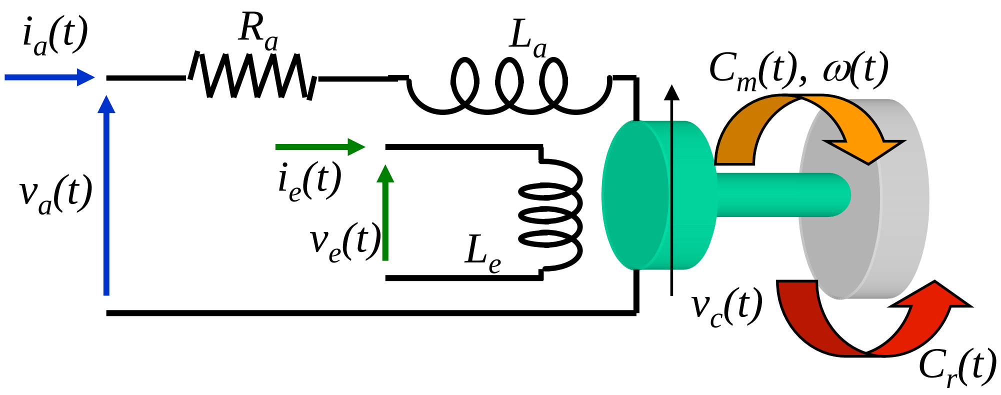


b1 = 50;
b2 = 20;



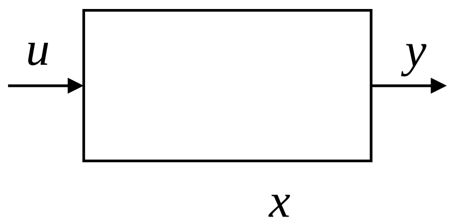
Sistemi - Esempi

- Motore elettrico in C.C.



$$
\begin{aligned}
v_a(t) &= R_a i_a + L_a \frac{d\, i_a}{dt} + v_c \\
C_m(t) &= B\omega + I\frac{d\omega}{dt} + C_r \\
v_c(t) &= k_1 \omega(t) \qquad C_m(t) = k_2 i_a(t) \\
\frac{d\,\theta(t)}{dt} &= \omega(t)
\end{aligned}
$$

se $v_e = \text{cost}$



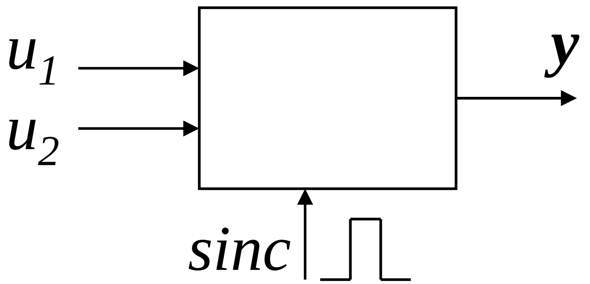
$$x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} v_a \\ c_r \end{bmatrix} \qquad y = [\theta]$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_A} & -\frac{k_1}{L_a} & 0 \\ \frac{k_2}{I} & -\frac{B}{I} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = [0,\ \ 0,\ \ 1] \qquad D = [0,\ 0]$$

3 stati
2 ingressi
1 uscita

Sistemi: esempi

- Rete sequenziale (sistema a stati finiti)



Il sistema è sincrono: l'uscita è 1 se il simbolo di ingresso attuale è 01 e se in precedenza, fra i simboli 00 e 11, si è presentato per ultimo 11

- Modello matematico:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= f(x(k),\ u(k)) \\
y(k) &= g(x(k),\ u(k))
\end{aligned}
$$

Funzione di stato futuro

x \ $u_1 u_2$	00	01	10	11
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

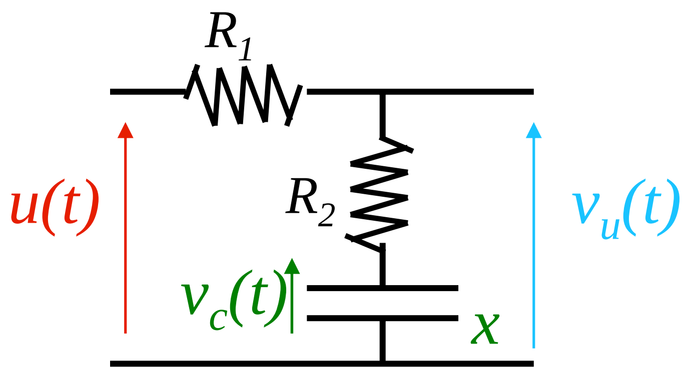
Funzione di uscita

x \ $u_1 u_2$	00	01	10	11
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0

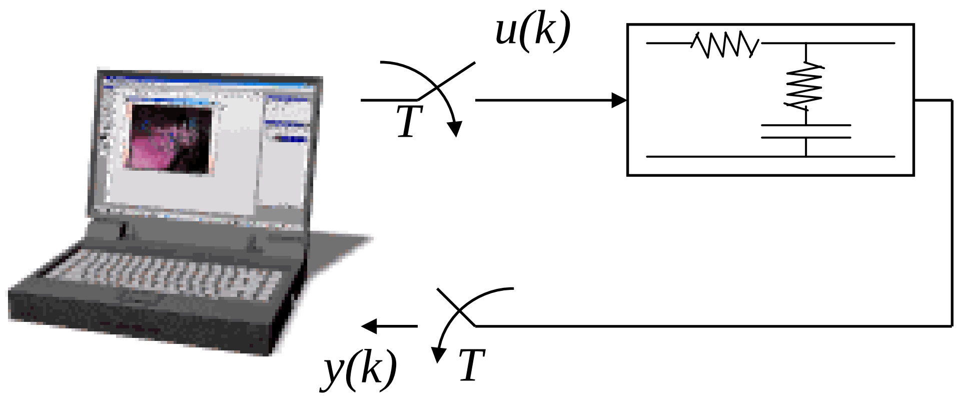
Sistema dinamico a tempo discreto

Sistemi: esempi

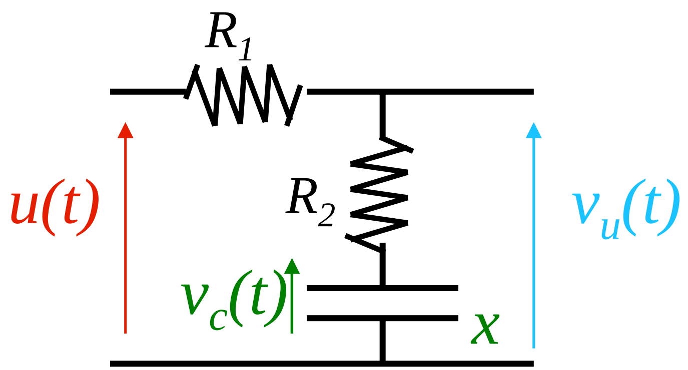
- Altri sistemi a tempo discreto si hanno p.e. quando un sistema a tempo continuo viene controllato con un elaboratore digitale



$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\
y(t) &= cx(t) + du(t)
\end{aligned}
$$

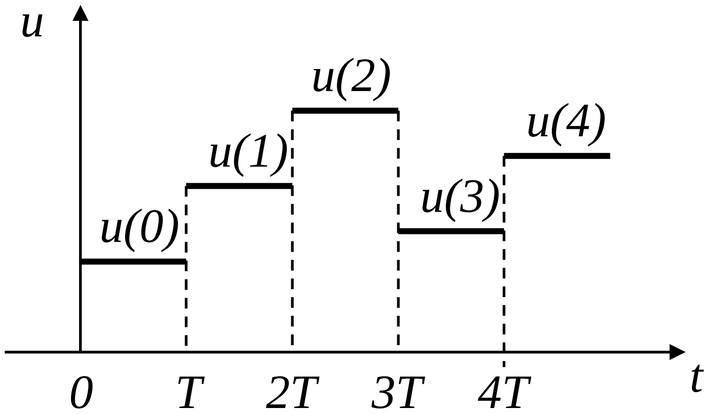


- Altri sistemi a tempo discreto si hanno p.e. quando un sistema a tempo continuo viene controllato con un elaboratore digitale



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

- Se all'ingresso è applicata una funzione costante a tratti e se l'uscita è "campionata" negli stessi istanti kT in cui l'ingresso varia:



$$\begin{aligned} x(k+1) &= a_d x(k) + b_d u(k) \\ y(k) &= c_d x(k) + d_d u(k) \end{aligned}$$

$$a_d = e^{aT}; \quad b_d = \int_0^T e^{a(T-\tau)} b d\tau$$

$$c_d = c; \quad d_d = d$$

Sistemi: esempi

- La funzione di transizione dello stato si ottiene (per verifica diretta) come

$$x(k) = x_0\, a_d^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_d^{k-j-1}\, b_d\, u(j)$$

Sistemi e Modelli - Definizioni

- Il modello matematico di un sistema dinamico in generale è caratterizzato da:
  1. un insieme dei tempi $\mathcal{T} \quad (\mathcal{T} = \mathbb{R} \quad o \quad \mathcal{T} = Z)$
  2. un insieme delle variabili di ingresso $\mathcal{U}$
  3. un insieme delle funzioni di ingresso $\mathcal{U}_f$
  4. un insieme delle variabili di uscita $\mathcal{Y}$
  5. un insieme delle variabili di stato $\mathcal{X}$

- D.1 Il sistema è a *tempo continuo*, o, semplicemente, *continuo*, se è

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}$$

- D.2 Il sistema è a *tempo discreto*, o, semplicemente, *discreto*, se è

$$\mathcal{T} = \mathbf{Z}$$

Definizione:

- Un modello si dice causale quando l'uscita corrispondente ad una data sollecitazione si manifesta soltanto in istanti non anteriori a quello iniziale di applicazione della sollecitazione
- Un modello non causale si dice anticipativo.
- Un modello anticipativo non può corrispondere ad alcun sistema fisico
  - non è immaginabile un sistema che reagisce ad una sollecitazione ancor prima che questa sia applicata!

Il modello

$$y(t) = a\frac{d\,x(t)}{d\,t}$$

è non causale se consideriamo x come ingresso ed y come uscita (si pensi alla derivata come rapporto incrementale)
$\Rightarrow$ occorrono sia il valore passato che quello futuro della variabile

Non si può costruire un derivatore ideale

è causale se consideriamo y come ingresso ed x come uscita

$$x(t) = \frac{1}{a}\int_0^t y(\tau)\,d\tau + x_0$$

Modelli non causali sono utilizzati per comodità di analisi e manipolazione

Sistemi e modelli causali

- In altre parole, un sistema (modello) si dice causale quando la sua uscita in un dato istante dipende dagli ingressi precedenti (fino a quell'istante) e non dai valori futuri (l'ingresso influenza solo i valori futuri dell'uscita o al massimo il suo valore attuale, non quelli passati).

- Non si ha conoscenza di *sistemi fisici non causali* o *anticipativi*, la cui definizione è quindi solo matematica.

- Un importante esempio di modello matematico anticipativo è dato dall'azione derivativa:

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

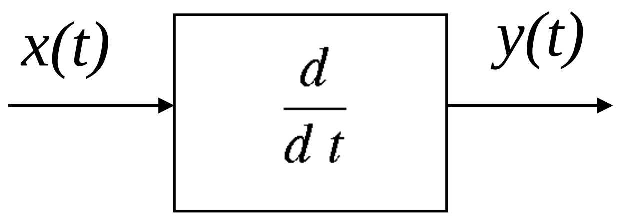
- Infatti dalla definizione di derivata si ha:

$$\frac{du(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{u(t+T) - u(t)}{T}$$

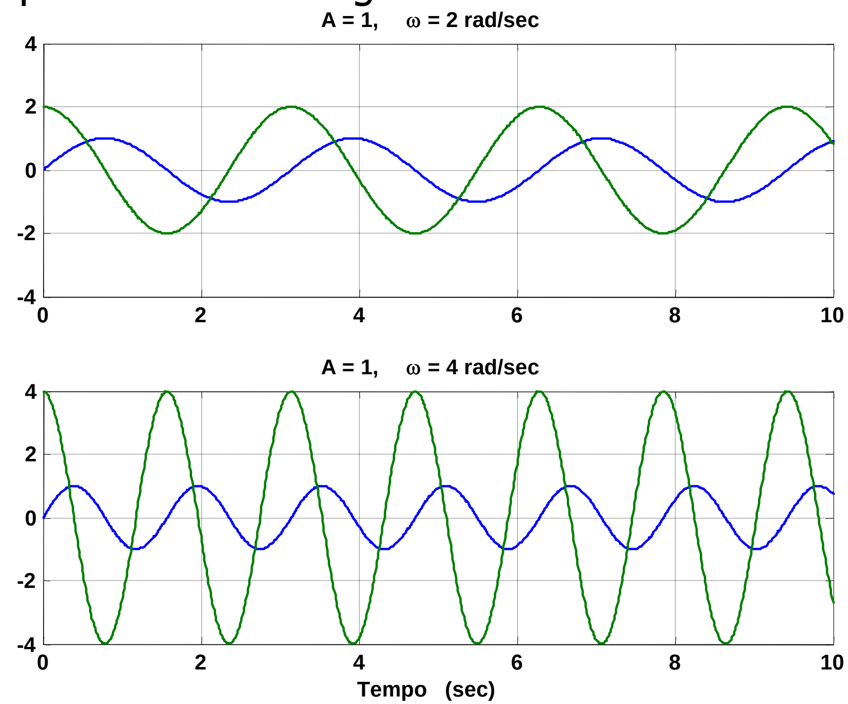
da cui si vede come per il calcolo sia necessaria la conoscenza del valore *futuro* della variabile u(t).

- **Esempio** (impossibilità fisica):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A \sin \omega t \\
y(t) &= \frac{d\,x(t)}{d\,t} = A\,\omega\,\cos \omega t
\end{aligned}
$$



- L'ampiezza (e quindi l'energia) del segnale di uscita *y(t)* crescerebbe all'infinito all'aumentare della pulsazione ω in ingresso!



Sistemi e Modelli - Definizioni

- D.3 Un sistema *privo di memoria* o *puramente algebrico* è composto dagli insiemi $\mathcal{T},\ \mathcal{U},\ \mathcal{Y}$ e da una *funzione ingresso/uscita*

$$y(t) = g(u(t),\, t)$$

- D.4 Un *sistema dinamico a tempo continuo* è composto dagli insiemi $\mathcal{T}(=\mathbb{R}),\ \mathcal{U},\ \mathcal{U}_f,\ \mathcal{X},\ \mathcal{Y}$, da una *funzione di velocità di transizione dello stato*

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\, u(t),\, t)$$

con soluzione unica per ogni stato iniziale e per ogni funzione di ingresso ammissibile, e da una *funzione di uscita*

$$y(t) = g(x(t),\, u(t),\, t)$$

- D.5 Un *sistema dinamico a tempo discreto* è composto dagli insiemi $\mathcal{T}(=Z),\ \mathcal{U},\ \mathcal{U}_f,\ \mathcal{X},\ \mathcal{Y}$, da una *funzione di stato futuro*

$$x(k+1) = f(x(k),\ u(k),\ k)$$

e da una *funzione di uscita*

$$y(k) = g(x(k),\ u(k),\ k)$$

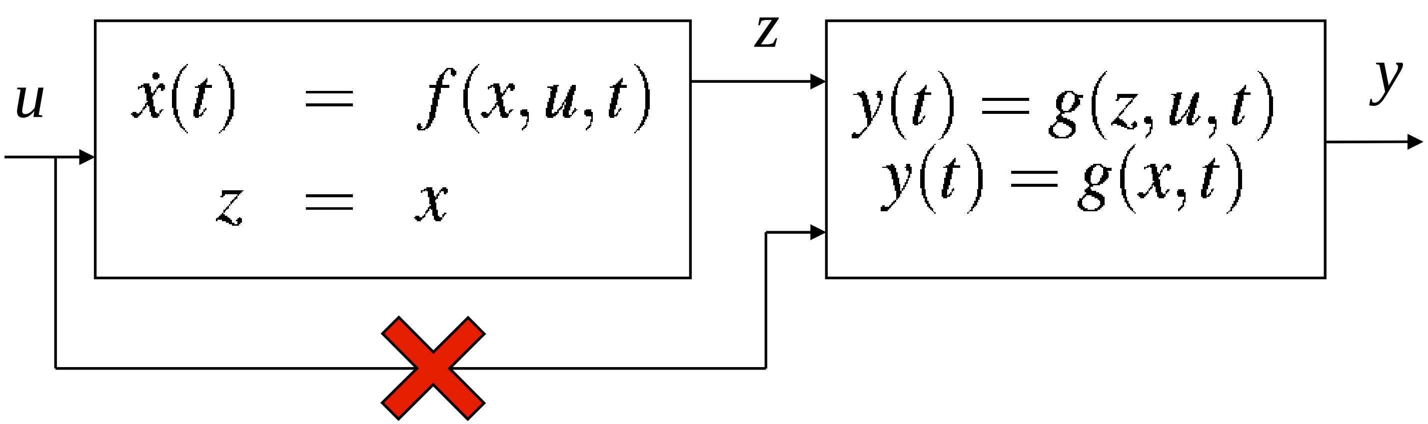
- D.6 Un *sistema puramente dinamico* è un sistema dinamico la cui funzione di uscita è

$$y(t) = g(x(t),\ t)$$

(non dipende direttamente dall'ingresso)

Sistema puramente dinamico

Sistema puramente algebrico



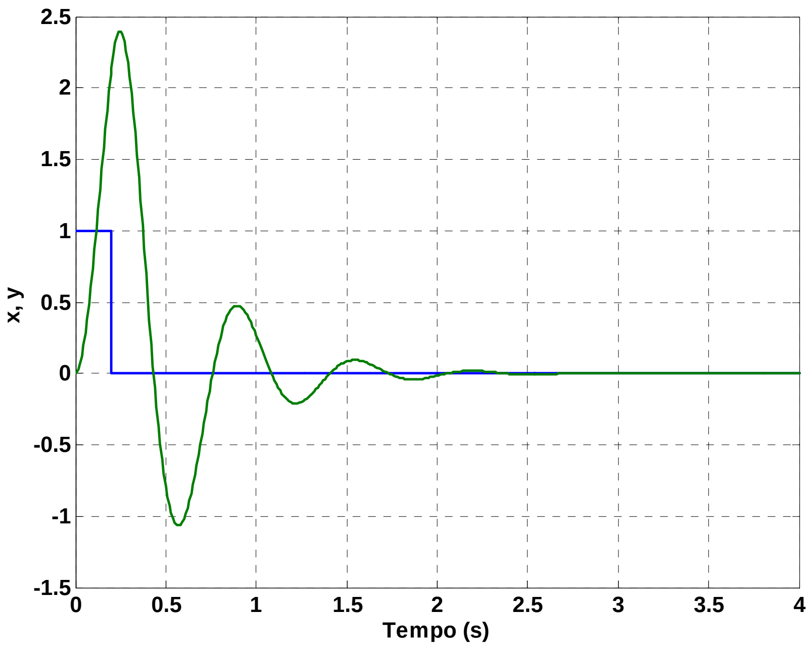
Manca nei sistemi puramente dinamici

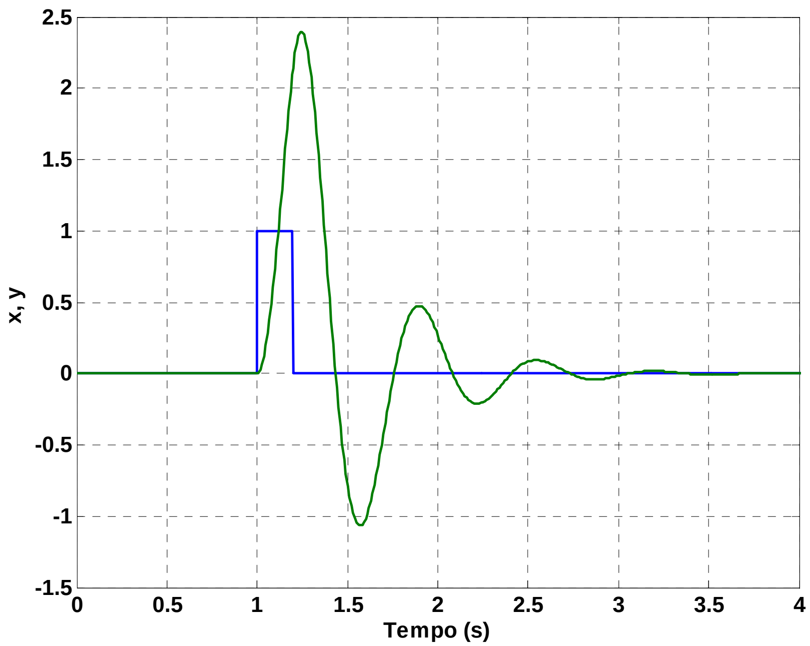
- Proprietà di separazione: *parte dinamica* (con stato)
  parte algebrica

- D.7 Un sistema è *stazionario* o *invariante nel tempo* se il tempo non compare esplicitamente nelle funzioni del suo modello matematico; altrimenti si dice *non stazionario* o *variante nel tempo*.

- Se le proprietà di un dato sistema sono indipendenti dal tempo (costanti), allora i relativi parametri sono costanti. I relativi modelli sono detti *stazionari* o *invarianti*.

- Per tali sistemi si ha la *ripetibilità degli esperimenti*: l'uscita che si ottiene applicando al sistema con un dato stato iniziale x_0 un ingresso al tempo t_0 è uguale (a parte una traslazione nel tempo) a quella che si ottiene (con lo stesso stato iniziale x_0) applicando lo stesso ingresso all'istante t-δ.





Modelli a parametri costanti nel tempo

- Da un punto di vista pratico, è raro che i parametri di un sistema non cambino nel tempo.
- D'altra parte, è sufficiente che essi non varino in modo apprezzabile in un arco temporale confrontabile alla durata dell'esperimento.
- Nei modelli stazionari, non ha importanza l'istante di inizio dell'osservazione, che viene quindi solitamente considerato uguale a zero: $t_0 = 0$

Sistemi e Modelli - Definizioni

- D.8 Un sistema è *lineare* se
  1. gli insiemi $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_f$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sono spazi vettoriali (tutti nello stesso campo $\mathcal{T}$)
  2. le funzioni che compongono il suo modello matematico sono lineari in x, u per tutti i t ammissibili.

  Nel caso opposto il sistema si dice *non lineare*

In genere si indicano con:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= a(t)\,x(t) + b(t)\,u(t) \\
y(t) &= c(t)\,x(t) + d(t)\,u(t)
\end{aligned}
$$

Sistemi lineari

$$
\dot{x}(t) = f(x(t),\ u(t),\ t)
$$
$$
y(t) = g(x(t),\ u(t),\ t)
$$

Sistemi non lineari

$$y(t) = D(t)\, u(t)$$

Sistema puramente algebrico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \\ y(t) &= C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t) \end{aligned}$$

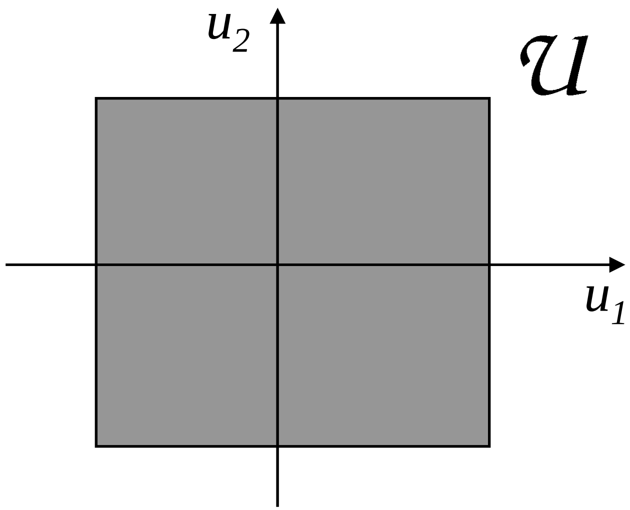
Sistema dinamico a tempo continuo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d(k)\, x(k) + B_d(k)\, u(k) \\ y(k) &= C_d(k)\, x(k) + D_d(k)\, u(k) \end{aligned}$$

Sistema dinamico a tempo discreto

Sistemi e Modelli - Definizioni

- Spesso l'insieme degli ingressi $\mathcal{U}$ viene assunto limitato per tener conto di limitazioni di carattere fisico



- Esempi:
  - tensione in ingresso ad un motore elettrico $-V_a < v < V_a$
  - portata in ingresso ad un serbatoio $0 < u < U$
  - …

- Classificazione sulla base dello stato

$\mathcal{X}$ = insieme degli stati
- insieme finito
- spazio vettoriale con dimensioni
  - finite
  - infinite

- D. 9 Si definiscono quindi:
  - Sistemi a *stati finiti*
  - Sistemi a *dimensioni finite*
  - Sistemi a *dimensioni infinite*

- **Funzione di transizione dello stato**

La soluzione delle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),\, u(t),\, t) \\ x(t+1) &= f(x(t),\, u(t),\, t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

è del tipo

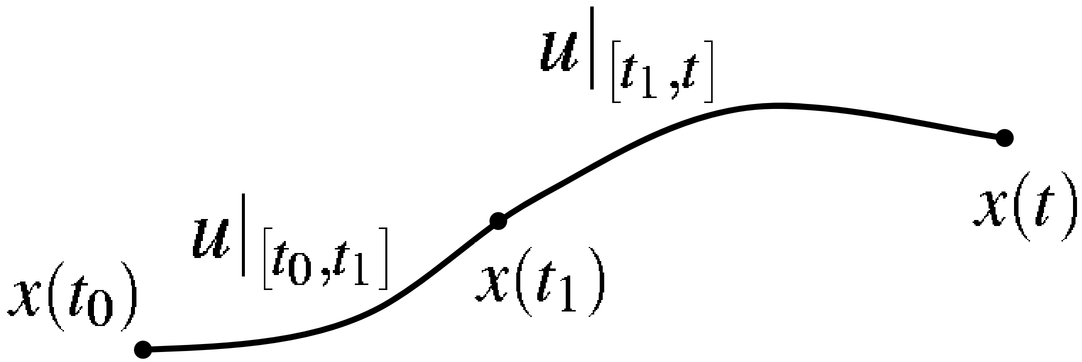
$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \qquad t \in [t_0,\, t]$$

e si chiama *funzione di transizione dello stato*

Proprietà della funzione di transizione dello stato

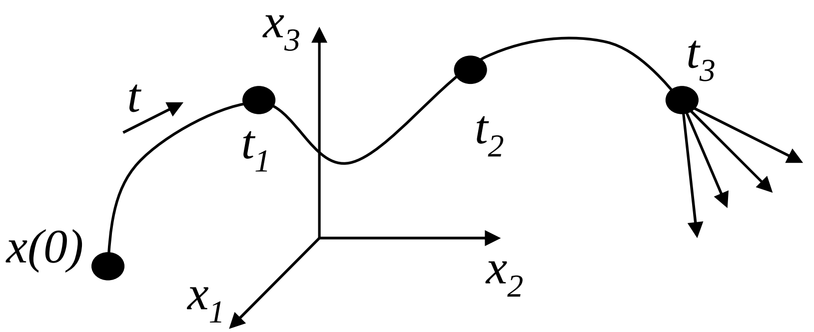
1. *Orientamento nel tempo*: è definita per $t \geq t_0$, ma non necessariamente per $t < t_0$
2. *Causalità*: dipende dalla funzione di ingresso limitatamente all'intervallo $[t_0, t]$
3. *Consistenza*: $$x = \varphi(t, t, x, u(\cdot))$$
4. *Composizione*: congruenza tra due successive transizioni

$$\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi(t, t_1, x_1, u(\cdot)) \qquad t_0 \leq t_1 \leq t$$



Rappresentazione dell’evoluzione dei sistemi

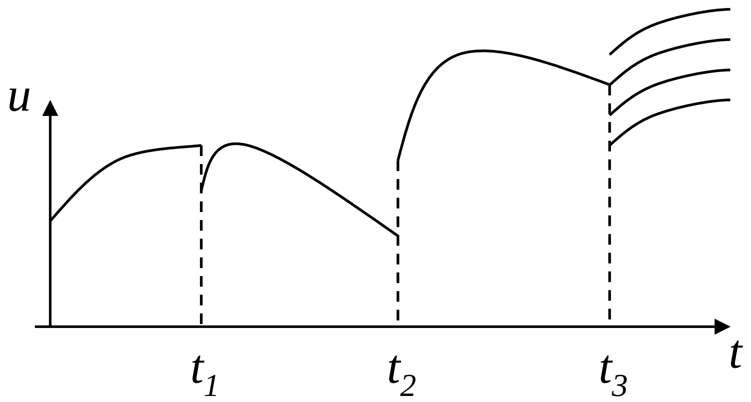
- L’evoluzione dello stato nel tempo può essere rappresentata con una *traiettoria* nello spazio degli stati, parametrizzata in funzione del tempo



$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

Traiettoria:

$$\{x(t) : x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)), \;\; t \in [t_0, \; t_1]\}$$



Possibili scelte di controllo

Funzione di ingresso

La scelta dell’ingresso in un dato istante permette di imporre orientamenti diversi alla tangente alla traiettoria in t: si agisce direttamente sulla *velocità*

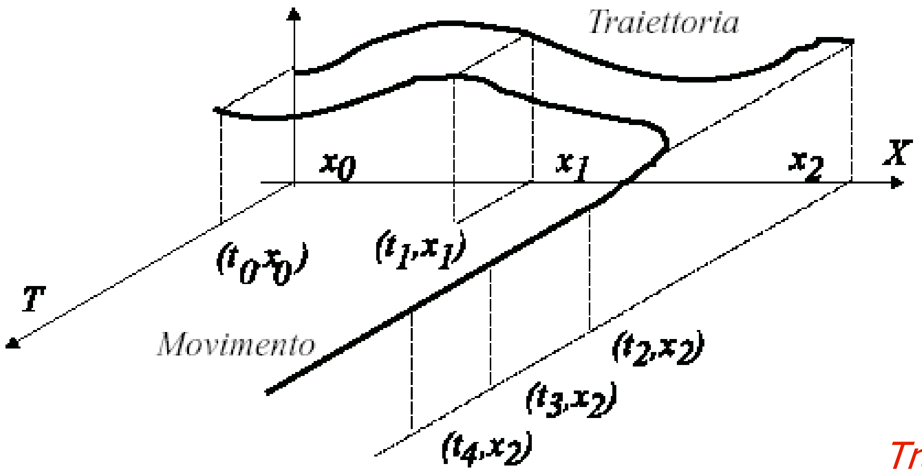
- *Evento*: coppia stato-tempo $\{t, x(t)\} \in T \times X$
- *Moto* o *Movimento* per $t \in [t_0, t_1]$ l'insieme degli eventi definiti dalla funzione di transizione

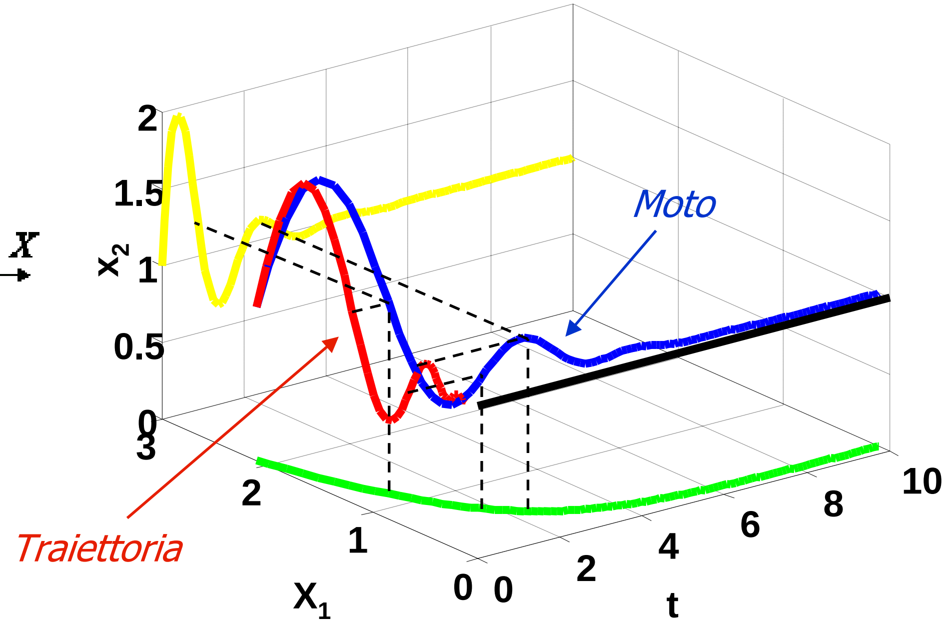
$$\{(t, x(t)) \mid x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)),\ t \in [t_0, t_1]\}$$

Il moto è definito nello spazio $T \times X$

- *Traiettoria*: immagine in X della funzione di transizione in $t \in [t_0, t_1]$

La traiettoria è definita in X





Sistemi e Modelli - Definizioni

- Analogamente, si ottiene una funzione che descrive le traiettorie delle uscite. Da:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),\ u(t),\ t) & (1) \\ y(t) &= g(x(t),\ u(t),\ t) & (2) \end{aligned}$$

Dalla (1) si è dedotta la *funzione di transizione* (dello stato) φ la quale, sostituita in (2), fornisce la *funzione di risposta* γ

$$\begin{aligned} y(t) &= g((\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)),\ u(t),\ t) \\ &= \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \end{aligned}$$

Traiettoria delle uscite:

$$\{y(t) : y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)),\ \ t \in [t_0,\ t_1]\}$$

Sistemi e Modelli - Definizioni

- Riepilogando:

  Un sistema, una volta che sia risolta l’equazione del suo modello matematico, è caratterizzato da una funzione di transizione (dello stato)

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

  e da una funzione di risposta

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

- D. 10 *Stati indistinguibili* in $[t_0, t_1]$: gli stati $x_1,\ x_2 \in \mathcal{X}$ lo sono se

$$\gamma(t, t_0, x_1, u(\cdot)) = \gamma(t, t_0, x_2, u(\cdot))$$

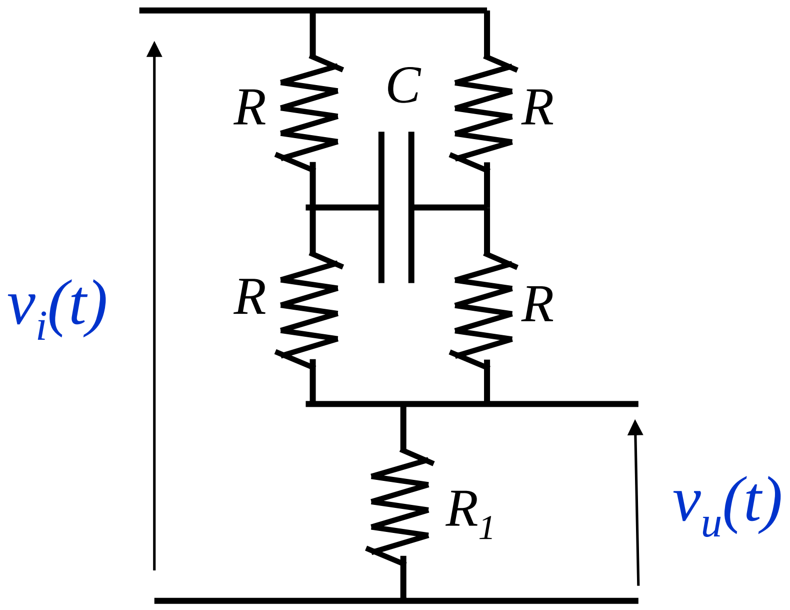
$$\forall t \in [t_0,\ t_1],\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$$

- D.11 *Stati equivalenti*: gli stati $x_1,\ x_2 \in \mathcal{X}$ lo sono se sono indistinguibili per ogni coppia di istanti $t_0,\ t_1 \in \mathcal{T}$

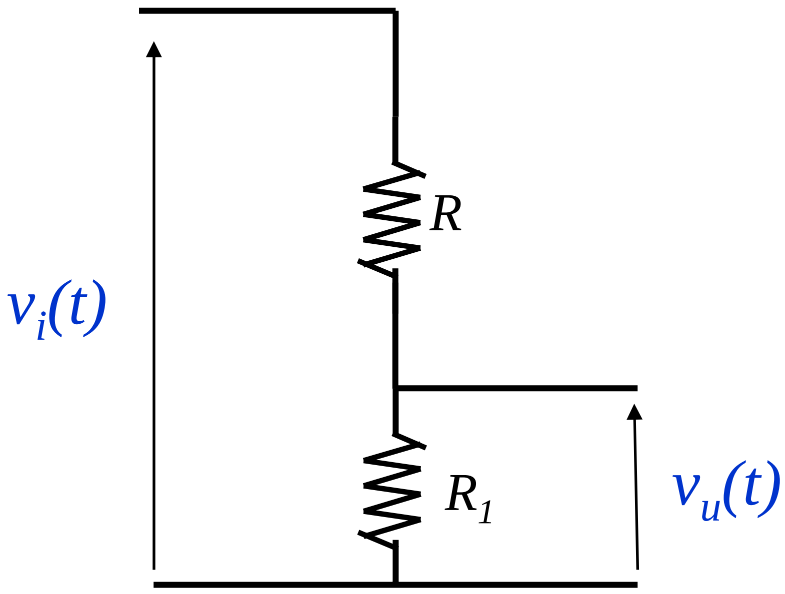
- D.12 *Sistema in forma minima*: è un sistema privo di stati equivalenti

Un sistema non in forma minima può essere ridotto in forma minima definendo un nuovo insieme degli stati in cui ogni nuovo stato corrisponde ad una classe di vecchi stati equivalenti

- Esempio:

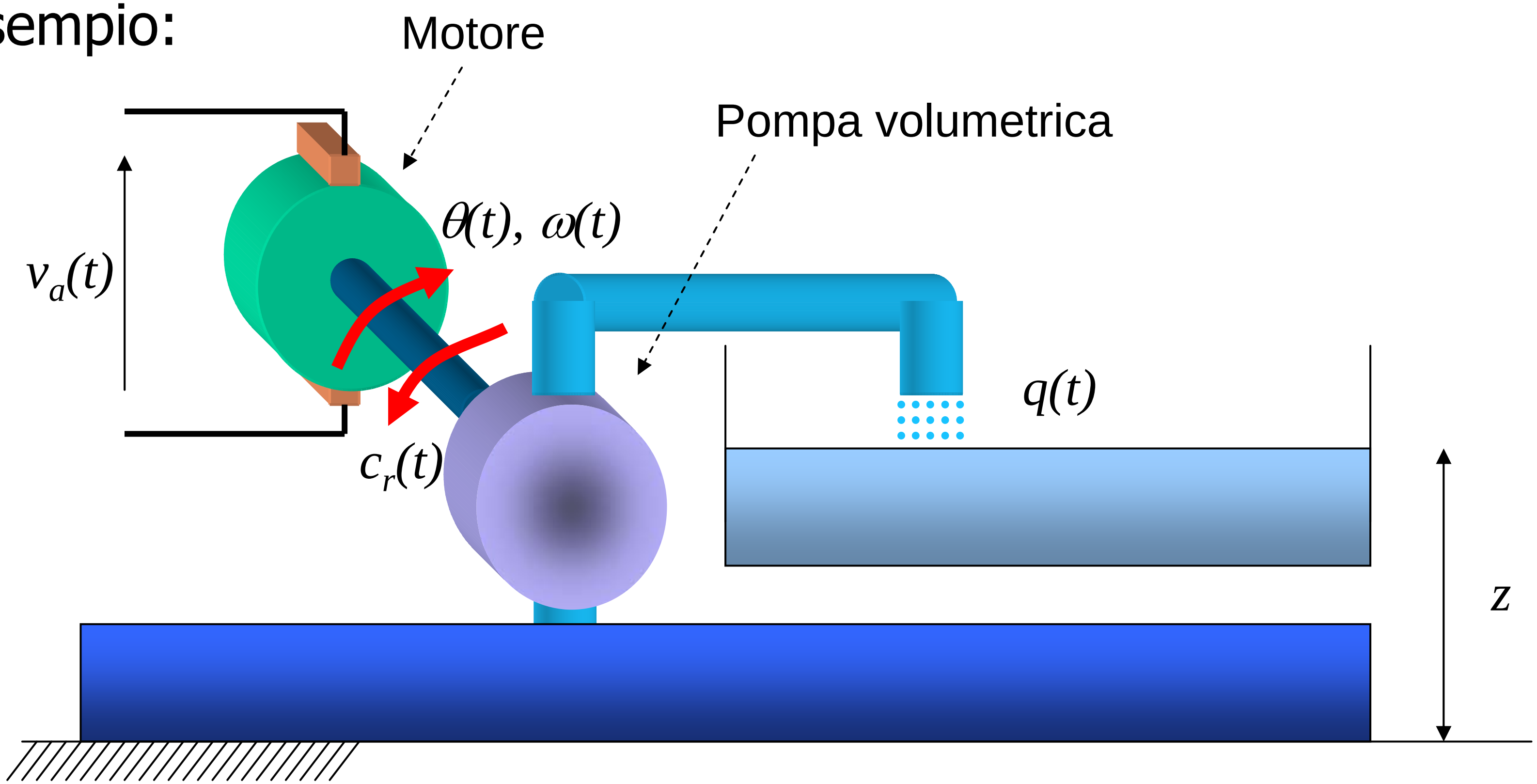


Sistema non in forma minima



Sistema in forma minima

- Esempio:



Pompa: $c_r = k_p\ \omega, \quad q = k_q\ \omega$

Serbatoio: $dz\,/\,dt = k_s\ q$

Unendo i modelli, si trovano due stati equivalenti $(\theta,\ z)$. Uno dei due, θ in questo caso, non interessa e può essere eliminato.

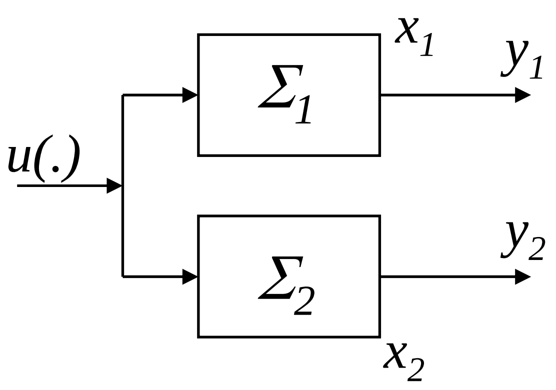
- D.13 *Sistemi equivalenti*: Σ_1 e Σ_2 lo sono se è

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \mathcal{U}_2 &= \mathcal{U}\\ \mathcal{U}_{f1} &= \mathcal{U}_{f2} &= \mathcal{U}_f\\ \mathcal{Y}_1 &= \mathcal{Y}_2 &= \mathcal{Y}\end{aligned}$$

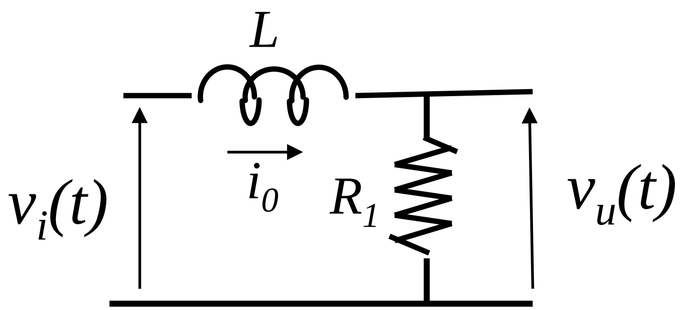
ed ad ogni stato $x_1 \in \mathcal{X}$ $(x_2 \in \mathcal{X})$ dell'uno si può associare uno stato $x_2 \in \mathcal{X}$ $(x_1 \in \mathcal{X})$ dell'altro tale che

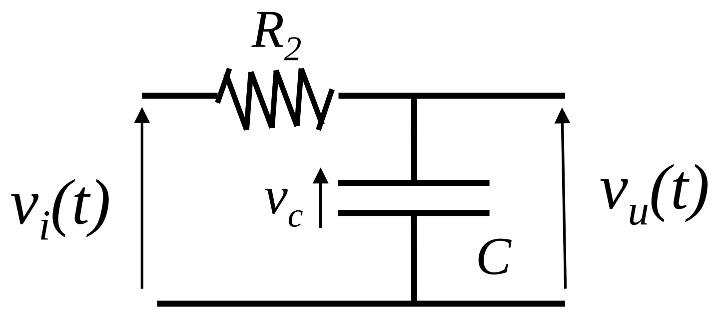
$$\gamma_1(t, t_0, x_1, u(\cdot)) = \gamma_2(t, t_0, x_2, u(\cdot))$$

$$\forall t \in [t_0,\ t_1],\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$$



- Esempio:





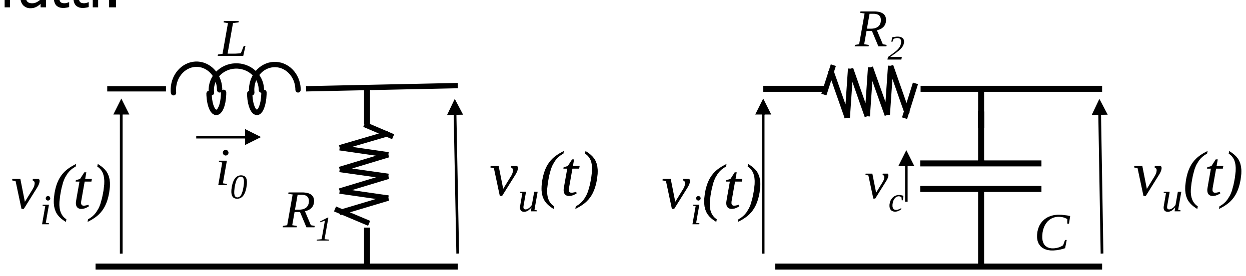
- I sistemi sono equivalenti se

$$\tau = \frac{L}{R_1} = R_2\, C$$

- Gli stati iniziali devono essere legati dalla relazione

$$i_0\, R_1 = v_0$$

- Infatti:



$$v_i = L\frac{di}{dt} + R_1 i \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} = -\frac{R_1}{L} i + \frac{v_i}{L}$$

$$\frac{v_i - v_c}{R_2} = C\frac{dv_c}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{CR_2} + \frac{v_i}{CR_2}$$

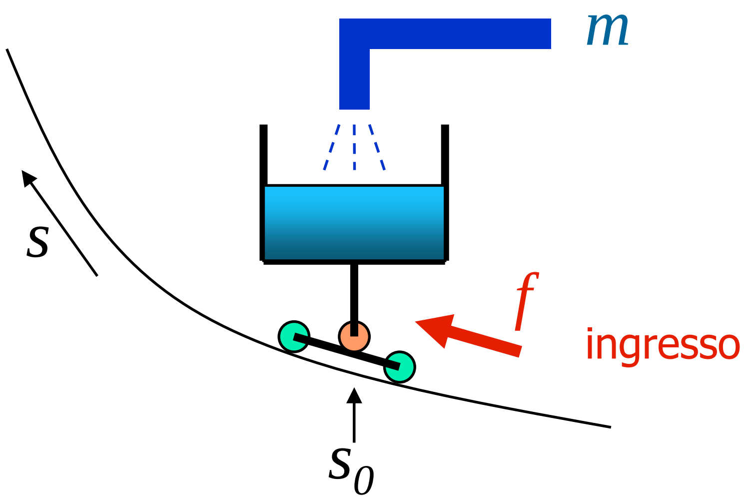
I due sistemi sono equivalenti se $\tau = \frac{L}{R_1} = R_2\, C$

L'evoluzione degli stati è tale che $i(t)\, R_1 = v_c(t)$

Particolari moti sono quelli costanti. La corrispondente traiettoria si riduce ad un unico stato detto *di equilibrio*.

- D.14 *Stato di equilibrio temporaneo* di un sistema dinamico Σ: lo è, nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ tale che

$$x = \varphi(t, t_0, x, u(\cdot)) \qquad \forall t \in [t_0,\ t_1]$$

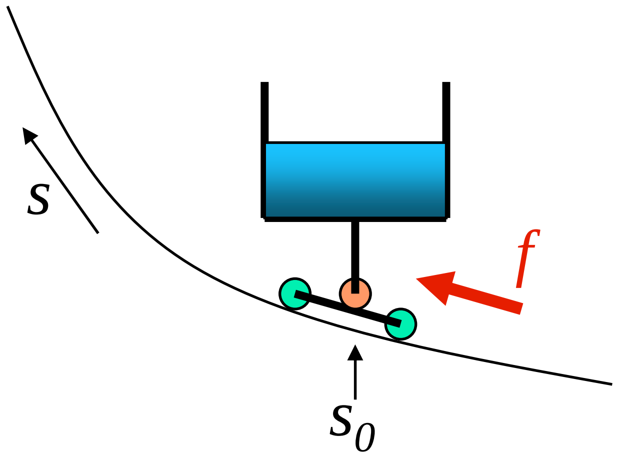


$$M = M_0 + mt \qquad massa$$

$$0 \le f \le F \qquad forza$$

- D.15 *Stato di equilibrio* è uno stato di equilibrio temporaneo in $[t_0, t_1]$ per ogni coppia t_0, t_1 in $\mathcal{T}$

- Esempio:



$$M = M_0 \qquad massa$$

$$0 \le f \le F \qquad forza$$

N.B. Può essere che non tutti i valori di s siano di equilibrio, poiché f è limitata

- ***Modelli matematici:***

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t),\ u(t),\ t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

Modello differenziale
ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(x(t),\ u(t),\ t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

Modello alle differenze
ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned}x(t) &= \varphi(t,\ t_0,\ x_0,\ u(\cdot))\\ y(t) &= g(x(t),\ u(t), t)\end{aligned}$$

Modello globale
ingresso-stato-uscita

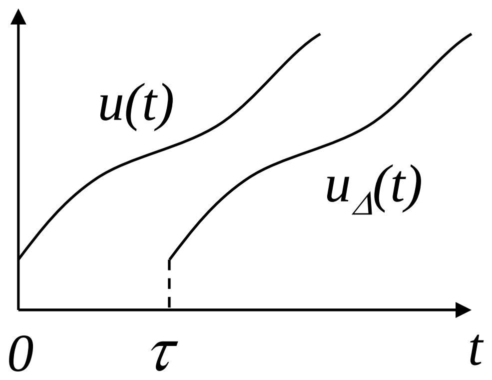
$$y(t) = \gamma(t,\ t_0,\ x_0,\ u(\cdot))$$

Modello globale
esterno

- Casi particolari: *modelli stazionari, modelli lineari, modelli lineari stazionari*

Sistemi stazionari

Soddisfano la proprietà di transizione nel tempo di cause ed effetti



$u_\Delta(t) = u(t-\tau)$ funzione di ingresso traslata

Si suppone che sia:

$$u_\Delta(\cdot) \in \mathcal{U}_f, \quad \forall \; u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$$

- Per sistemi stazionari, la funzione di transizione e la funzione di risposta soddisfano le relazioni

$$x(t) = \varphi(t,\, t_0,\, x_0,\, u(\cdot)) \iff x(t) = \varphi(t+\tau,\, t_0+\tau,\, x_0,\, u_\Delta(\cdot))$$
$$y(t) = \gamma(t,\, t_0,\, x_0,\, u(\cdot)) \iff y(t) = \gamma(t+\tau,\, t_0+\tau,\, x_0,\, u_\Delta(\cdot))$$

In particolare, per $\tau = -t_0$, si ha

$$x(t) = \varphi(t,\ t_0,\ x_0,\ u(\cdot)) \iff x(t) = \varphi(t - t_0,\ 0,\ x_0,\ u_\Delta(\cdot))$$

$$y(t) = \gamma(t,\ t_0,\ x_0,\ u(\cdot)) \iff y(t) = \gamma(t - t_0,\ 0,\ x_0,\ u_\Delta(\cdot))$$

e quindi si ottiene che nei sistemi stazionari:

1. si può sempre assumere l'istante iniziale $t_0 = 0$
2. le funzioni di transizione e di uscita dipendono dalla differenza t-t_0 e non da t e t_0 separatamente

Sistemi lineari

- Le funzioni φ e γ sono lineari rispetto allo stato iniziale e alla f. di ingresso

Siano α e β due scalari arbitrari, $x_{01},\, x_{02} \in \mathcal{X}$ e $u_1,\, u_2 \in \mathcal{U}_f$

$$\varphi(t,\, t_0,\, \alpha x_{01} + \beta x_{02},\, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot)) = \\ = \alpha\varphi(t,\, t_0,\, x_{01},\, u_1(\cdot)) + \beta\varphi(t,\, t_0,\, x_{02},\, u_2(\cdot))$$

$$\gamma(t,\, t_0,\, \alpha x_{01} + \beta x_{02},\, \alpha u_1(\cdot) + \beta u_2(\cdot)) = \\ = \alpha\gamma(t,\, t_0,\, x_{01},\, u_1(\cdot)) + \beta\gamma(t,\, t_0,\, x_{02},\, u_2(\cdot))$$

- *Importante conseguenza:* per i sistemi lineari vale la proprietà di scomposizione del moto e della risposta

$$\varphi(t,\, t_0,\, x_0,\, u(\cdot)) = \underbrace{\varphi(t,\, t_0,\, x_0,\, 0)}_{\text{Moto libero}} + \underbrace{\varphi(t,\, t_0,\, 0,\, u(\cdot))}_{\text{Moto forzato}}$$

$$\gamma(t,\, t_0,\, x_0,\, u(\cdot)) = \underbrace{\gamma(t,\, t_0,\, x_0,\, 0)}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\gamma(t,\, t_0,\, 0,\, u(\cdot))}_{\text{Risposta forzata}}$$

- Inoltre:
  1. Stati indistinguibili in $[t_0, t_1]$ danno luogo alla stessa risposta libera in $[t_0, t_1]$
  2. Un S.L. è in forma minima se non esistono due diversi stati iniziali corrispondenti alla stessa risposta libera.

Controllabilità e Raggiungibilità

Rappresentano la possibilità di influire sul moto $x(\cdot)$ o sulla risposta $y(\cdot)$ di un sistema dinamico Σ mediante una opportuna scelta della funzione di ingresso o di controllo $u(\cdot)$

1. D.16 *Insiemi degli stati raggiungibili all'istante t_1 a partire dallo stato x_0 all'istante t_0*

$$\mathcal{V}^+(t_0, t_1, x_0) \;=\; \{x_1 : x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)),\; u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

2. D.17 *Insieme degli stati raggiungibili in un istante dell'intervallo $[t_0, t_1]$ a partire da x_0 in t_0*

$$\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0) \;=\; \{x_1 : x_1 = \varphi(\tau, t_0, x_0, u(\cdot)),\; \tau \in [t_0, t_1],\; u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

3. D.18 *Insiemi degli stati controllabili allo stato x_1 all'istante t_1 a partire dall'istante t_0*

$$\mathcal{V}^-(t_0,t_1,x_1) \;=\; \{x_0 : x_1 = \varphi(t_1,t_0,x_0,u(\cdot)),\; u(\cdot)\in\mathcal{U}_f\}$$

4. D.19 *Insieme degli stati controllabili allo stato x_1 all'istante t_1 a partire da un istante dell'intervallo $[t_0, t_1]$*

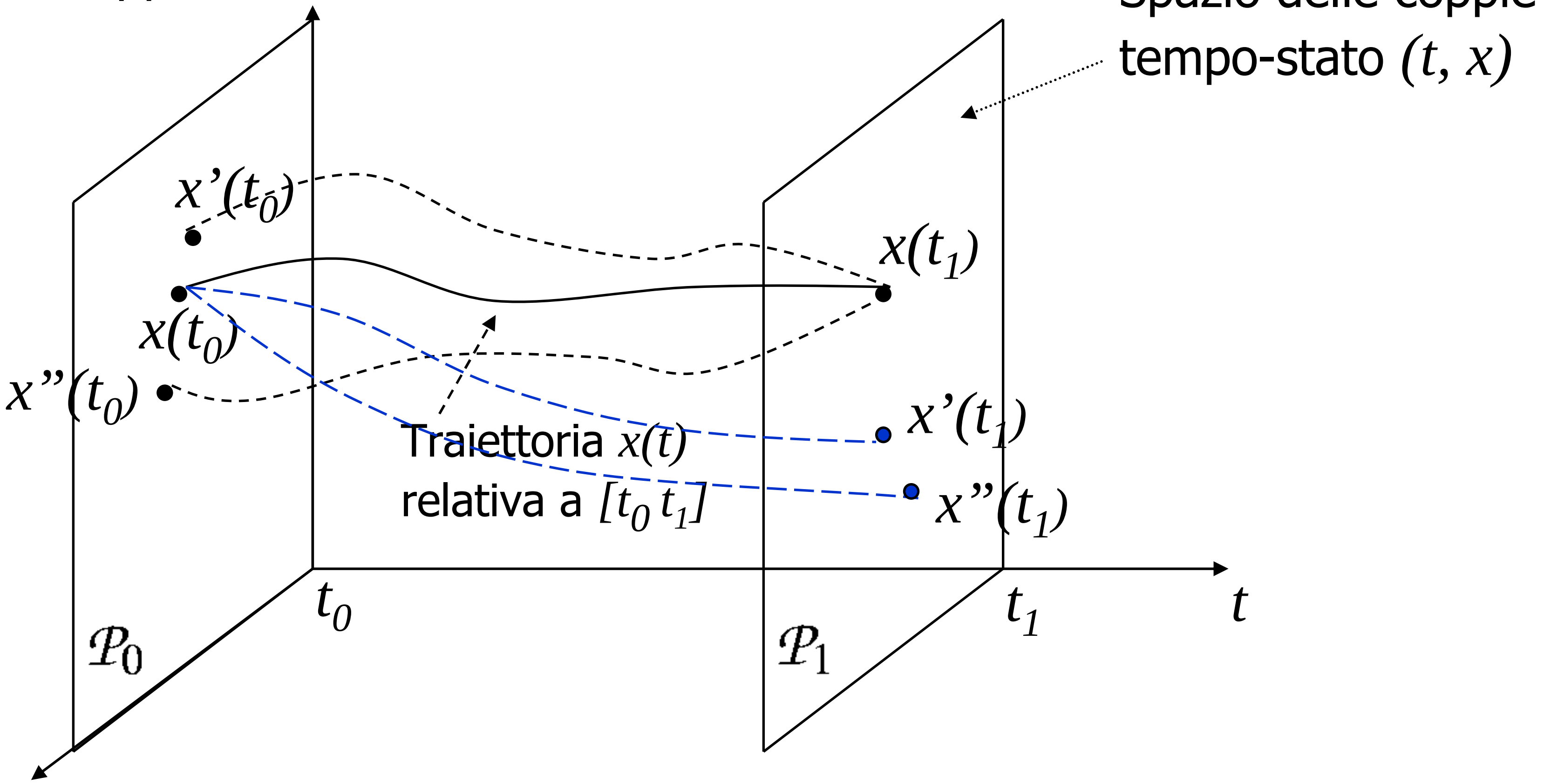
$$\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x_1) \;=\; \{x_0 : x_1 = \varphi(t_1,\tau,x_0,u(\cdot)),\; \tau\in[t_0,t_1],\; u(\cdot)\in\mathcal{U}_f\}$$

Si ha che

$$\mathcal{V}^+(t_0,t_1,x) \subseteq \mathcal{W}^+(t_0,t_1,x) \qquad \forall\, x\in\mathcal{X}$$

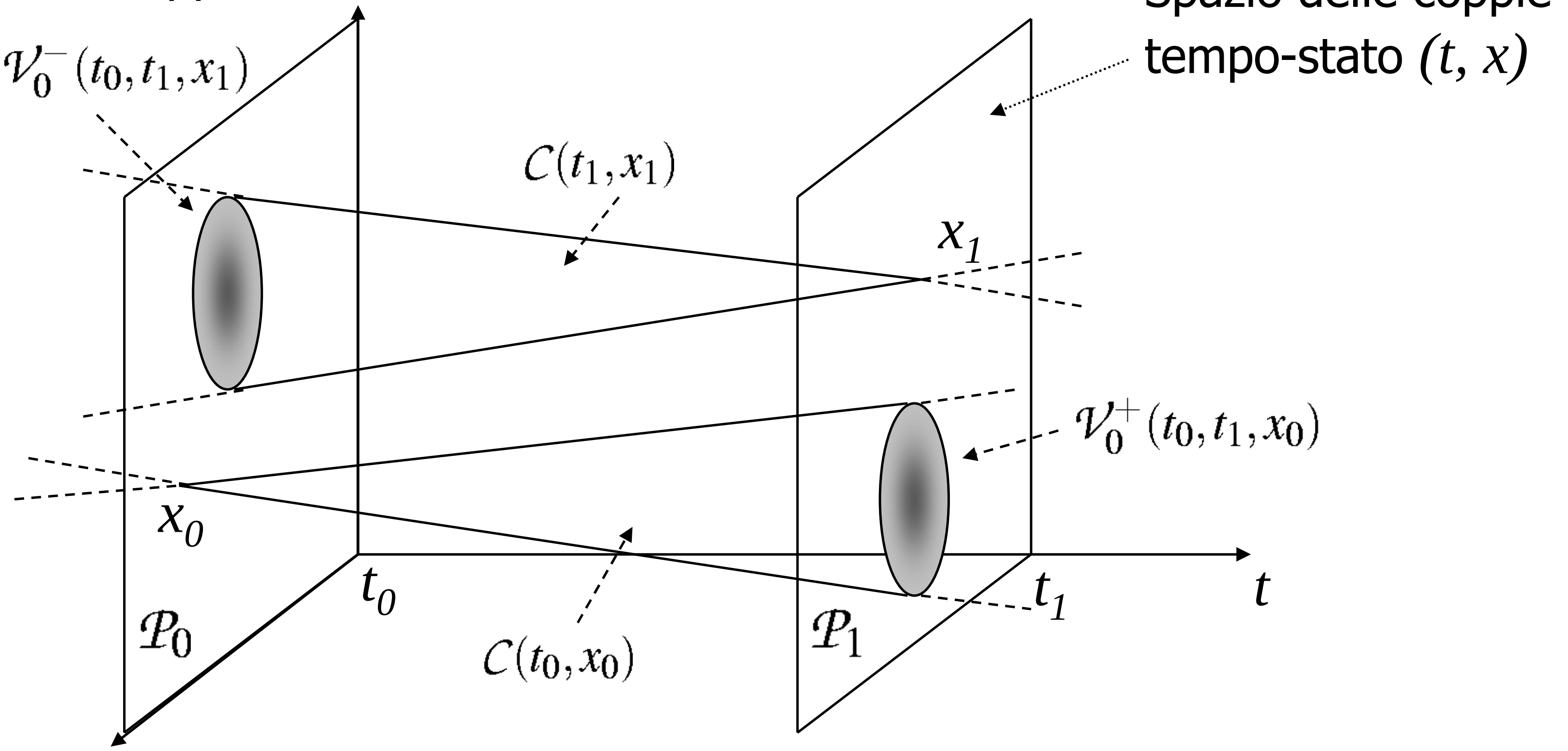
$$\mathcal{V}^-(t_0,t_1,x) \subseteq \mathcal{W}^-(t_0,t_1,x) \qquad \forall\, x\in\mathcal{X}$$

Rappresentazione in $\mathcal{X} = \Re^2$



$\mathcal{P}_0 = \{(t,x) : t = t_0\}$ $\quad \mathcal{P}_1 = \{(t,x) : t = t_1\}$ Coppie (t,x) relative agli istanti t_0, t_1

Rappresentazione in $\mathcal{X} = \Re^2$



$\mathcal{P}_0 = \{(t, x) : t = t_0\}$ $\mathcal{P}_1 = \{(t, x) : t = t_1\}$ Coppie (t,x) relative agli istanti t_0, t_1

$C(t_1, x_1)$ $C(t_0, x_0)$ Insieme di tutti i moti ammissibili cui appartengono (t_1, x_1) e (t_0, x_0)

- Definiamo inoltre:

$$\mathcal{M} = \{(t,x), \quad t \in [t_0, t_1]\}$$

- Si ha che:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^-(t_0,t_1,x_1) &= \mathcal{C}(t_1,x_1) \cap \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{V}^+(t_0,t_1,x_0) &= \mathcal{C}(t_0,x_0) \cap \mathcal{P}_1 \end{aligned}$$

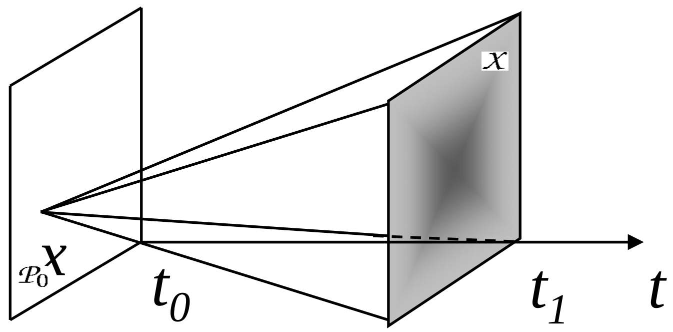
- E inoltre:

$\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x_1)$: Proiezione lungo l'asse t su $\mathcal{P}_0$ di $\mathcal{C}(t_1,x_1) \cap \mathcal{M}$

$\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x_0)$: Proiezione lungo l'asse t su $\mathcal{P}_1$ di $\mathcal{C}(t_0,x_0) \cap \mathcal{M}$

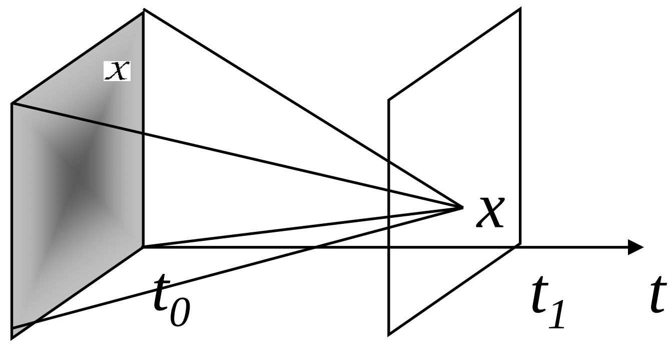
- Lo stato di un sistema (o il sistema stesso) si dice *completamente raggiungibile* dall'evento (t_0, x) nell'intervallo $[t_0, t_1]$ quando

$$\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}$$



- Lo stato di un sistema (o il sistema stesso) si dice *completamente controllabile* all'evento (t_1, x) nell'intervallo $[t_0, t_1]$ quando

$$\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}$$



- Nel caso di *sistemi stazionari*, potendo assumere $t_0 = 0$, si adotta una notazione semplificata:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}^+(t_0,t_1,x) &\iff \mathcal{V}^+_{t_1}(x)\\
\mathcal{W}^+(t_0,t_1,x) &\iff \mathcal{W}^+_{t_1}(x)\\
\mathcal{V}^-(t_0,t_1,x) &\iff \mathcal{V}^-_{t_1}(x)\\
\mathcal{W}^-(t_0,t_1,x) &\iff \mathcal{W}^-_{t_1}(x)
\end{aligned}
$$

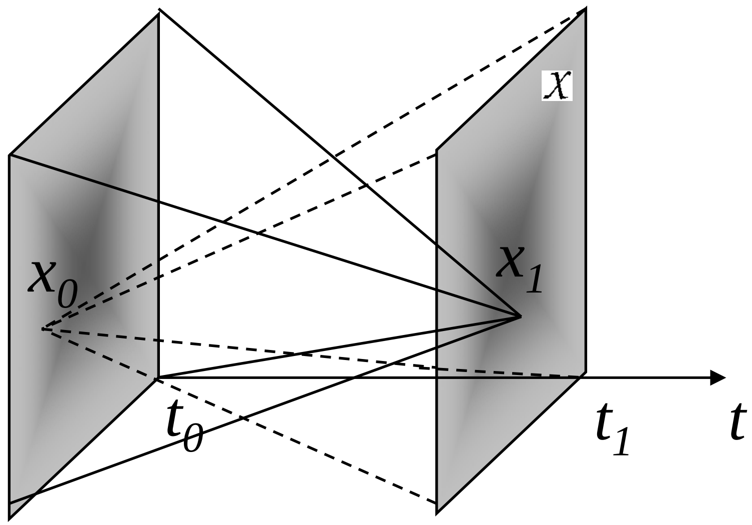
- Si definiscono gli insiemi $\mathcal{W}^+(z)$ e $\mathcal{W}^-(z)$ come

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^+(z) &= \lim_{t\to\infty} \mathcal{W}^+_t(z)\\
\mathcal{W}^-(z) &= \lim_{t\to\infty} \mathcal{W}^-_t(z)
\end{aligned}
$$

cioè gli insiemi degli stati raggiungibili da x e controllabili a x in un tempo comunque elevato.

- Un sistema stazionario si dice *fortemente connesso* se è possibile ottenere la transizione fra due stati qualunque, cioè se

$$\mathcal{W}^+(z) = \mathcal{W}^-(z) = \mathcal{X} \qquad \forall\, x \in \mathcal{X}$$



Osservabilità (e Ricostruibilità)

- La *"osservabilità"* indica la possibilità di determinare lo stato iniziale $x(t_0)$ o lo stato finale $x(t_1)$ (si parla in questo caso talora di *"ricostruibilità"*) conoscendo l'evoluzione dell'ingresso e dell'uscita nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

- Il problema dell'osservazione dello stato iniziale non ammette soluzione se lo stato iniziale appartiene ad una classe di stati indistinguibili in $[t_0, t_1]$.

Osservabilità (e Ricostruibilità)

Si definiscono gli insiemi:

- *Stati iniziali compatibili* con le funzioni $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ in $[t_0, t_1]$

$$\varepsilon^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) = \{x_0 : y(\tau) = \gamma(\tau, t_0, x_0, u(\cdot)), \tau \in [t_0, t_1]\}$$

- *Stati finali compatibili* con le funzioni $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ in $[t_0, t_1]$

$$\varepsilon^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) = \{x_1 : x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)),\\ x_0 \in \varepsilon^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))\}$$

dove la funzione $y(\cdot)$ non è arbitraria, ma vincolata ad appartenere al seguente insieme delle funzioni ammissibili

$$\mathcal{Y}_f(t_0, u(\cdot)) = \{y(\cdot) : y(t) = \gamma(t, t_0, x_0, u(\cdot)), t \geq t_0, x_0 \in \mathcal{X}\}$$

Lo stato di un sistema (o il sistema stesso) si dice:

- *diagnosticabile* in $[t_0, t_1]$ se esiste una $u(\cdot) \in \mathcal{U}_F$ tale che l'insieme $\varepsilon^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ comprenda un solo elemento x_0 per ogni $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f$,
- *incasellabile* in $[t_0, t_1]$ se esiste una $u(\cdot) \in \mathcal{U}_F$ tale che $\varepsilon^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ comprenda un solo elemento x_1 per ogni $y(\cdot) \in \mathcal{Y}_f$

Lo stato di un sistema (o il sistema stesso) si dice:

- *Completamente osservabile* in $[t_0, t_1]$ se è diagnosticabile in $[t_0, t_1]$ con qualunque $u(\cdot) \in \mathcal{U}_F$
- *Completamente ricostruibile* in $[t_0, t_1]$ se è incasellabile in $[t_0, t_1]$ con qualunque $u(\cdot) \in \mathcal{U}_F$

Sistemi e Modelli - Definizioni

- Per sistemi stazionari si può usare la notazione

$$\varepsilon^{-}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon^{-}_{t_1}(u(\cdot), y(\cdot))$$

$$\varepsilon^{+}(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot)) \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon^{+}_{t_1}(u(\cdot), y(\cdot))$$

- Implicazioni:

Sistema diagnosticabile	$\Longrightarrow$	**Sistema incasellabile**
$\Uparrow$		$\Uparrow$
Sistema completamente osservabile	$\Longrightarrow$	**Sistema completamente ricostruibile**

Problemi di controllo e di osservazione:

1. Controllo tra due stati assegnati
2. Controllo per ottenere un'uscita assegnata
3. Controllo per ottenere una funzione di uscita assegnata
4. Osservazione dello stato
5. Ricostruzione dello stato
6. Diagnosi
7. Incasellamento

CONTROLLI AUTOMATICI LS

Sistemi e Modelli
FINE

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/~cmelchiorri