CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Analisi modale

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/~cmelchiorri

Analisi Modale

Si vuole studiare l'evoluzione nel tempo di un sistema dinamico. A tale scopo, si faccia riferimento a:

- *Sistema tempo continuo*

(1) $$\dot{x}(t) = \bar{A}\, x(t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{\bar{A}\, t}\, x_0$$

- *Sistema tempo discreto*

(2) $$x(k+1) = \bar{A}_d\, x(k), \qquad x(0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(k) = \bar{A}_d^k\, x_0$$

L'evoluzione nei due casi dipende dalle funzioni del tempo di tipo $e^{A\,t}$ o A_d^k, le cui proprietà strutturali possono essere evidenziate tramite una opportuna trasformazione di similarità

$$x(t) = T\, e^{A\,t} T^{-1}\, x_0 \qquad\qquad x(t) = T\, A_d^k T^{-1}\, x_0$$

dove le matrici T sono costanti e le A, A_d hanno forma più semplice (forma di Jordan: diagonali o diagonali a blocchi) rispetto a quelle originali.

Analisi Modale

- **Definizione:** le funzioni del tempo che compaiono in $e^{A\,t}$ o A_d^k, in (1) o (2) rispettivamente prendono il nome di *modi del sistema*.

- Mediante l'analisi dei modi (*analisi modale*) si può caratterizzare la risposta libera di un sistema a partire dai suoi autovalori.

Autovalori distinti

- In questo caso la matrice A (A_d) è in forma diagonale del tipo

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Caso tempo continuo

$$e^{A\,t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Caso tempo discreto

$$A_d^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

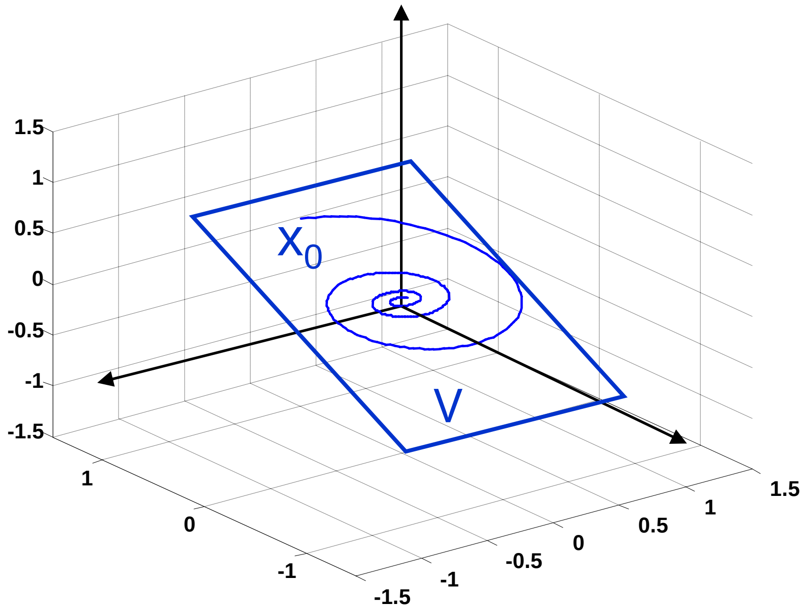
Analisi Modale

- I modi del sistema sono funzioni linearmente indipendenti in quanto gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono distinti.

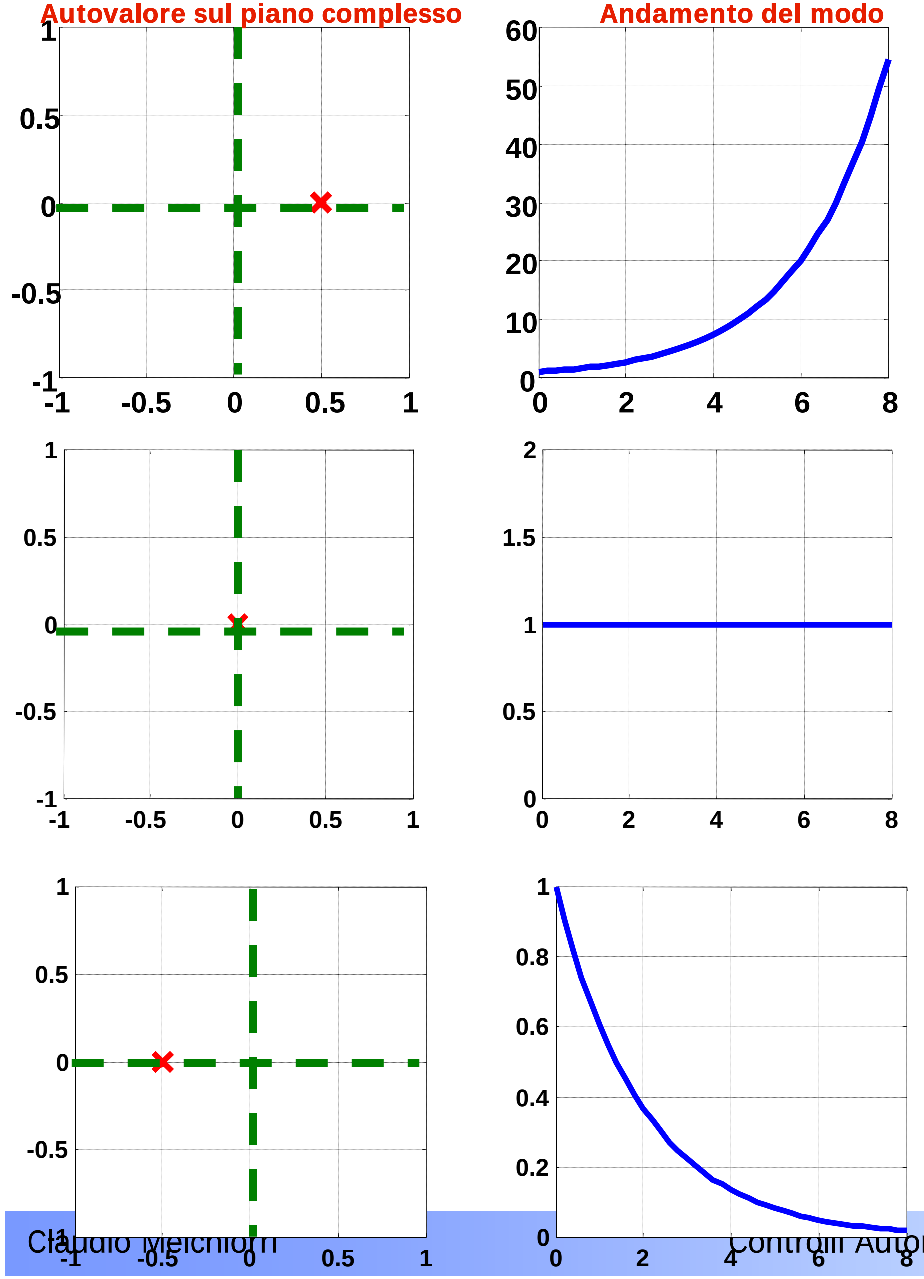
$$e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t} \qquad\qquad \lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$$

- Se lo stato iniziale x_0 appartiene all'autospazio relativo ad un particolare autovalore, allora l'evoluzione libera del sistema appartiene allo stesso autospazio.

- Ciascun modo può venire "eccitato" indipendentemente dagli altri modi; ciascun modo complesso in generale viene eccitato assieme al suo complesso, a meno che lo stato iniziale sia a componenti complesse.



Analisi Modale



$\lambda = 0.5$

$\lambda = 0$

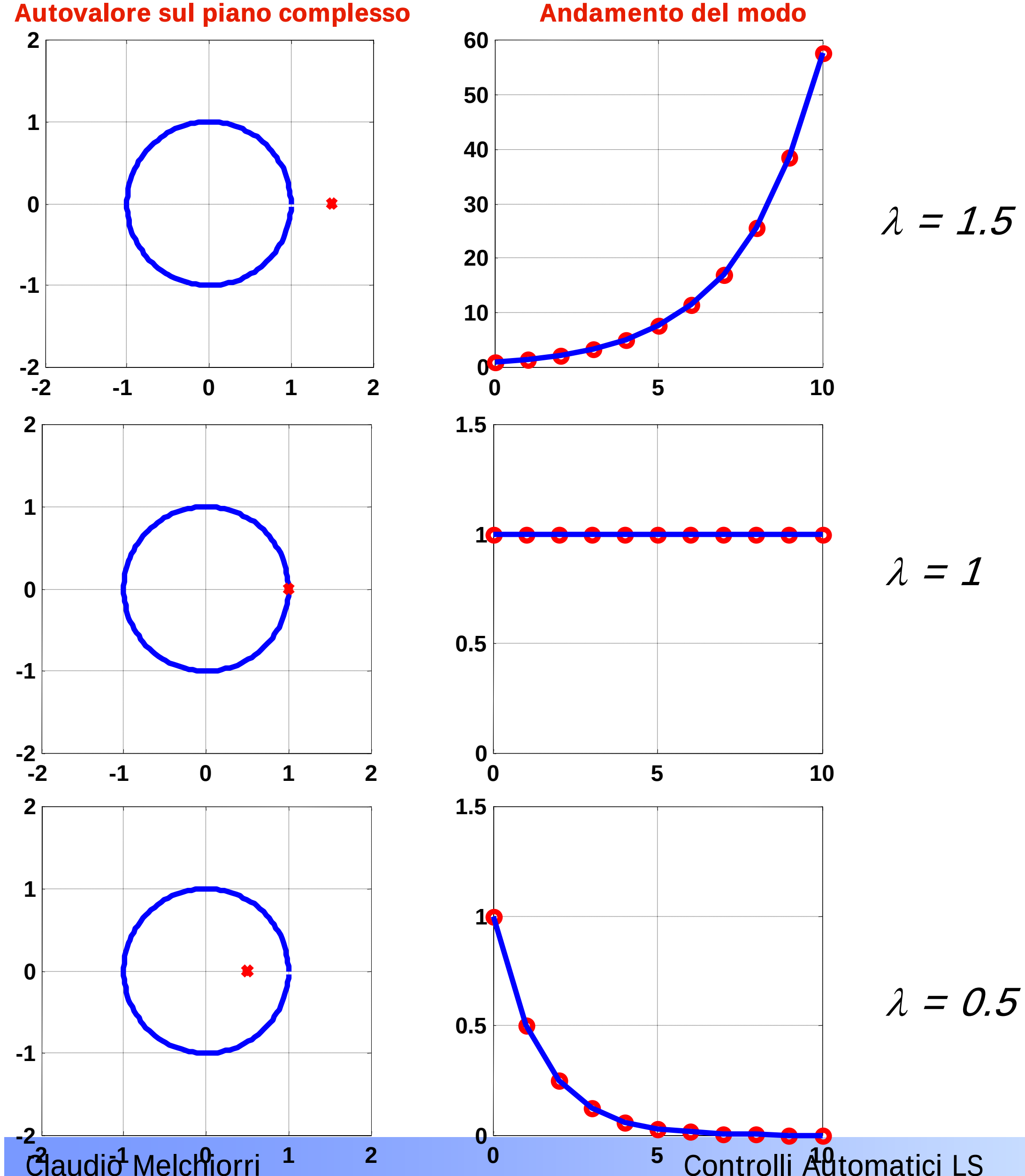
$\lambda = -0.5$

Sistemi tempo continuo

Autovalori reali semplici

$e^{\lambda t}$

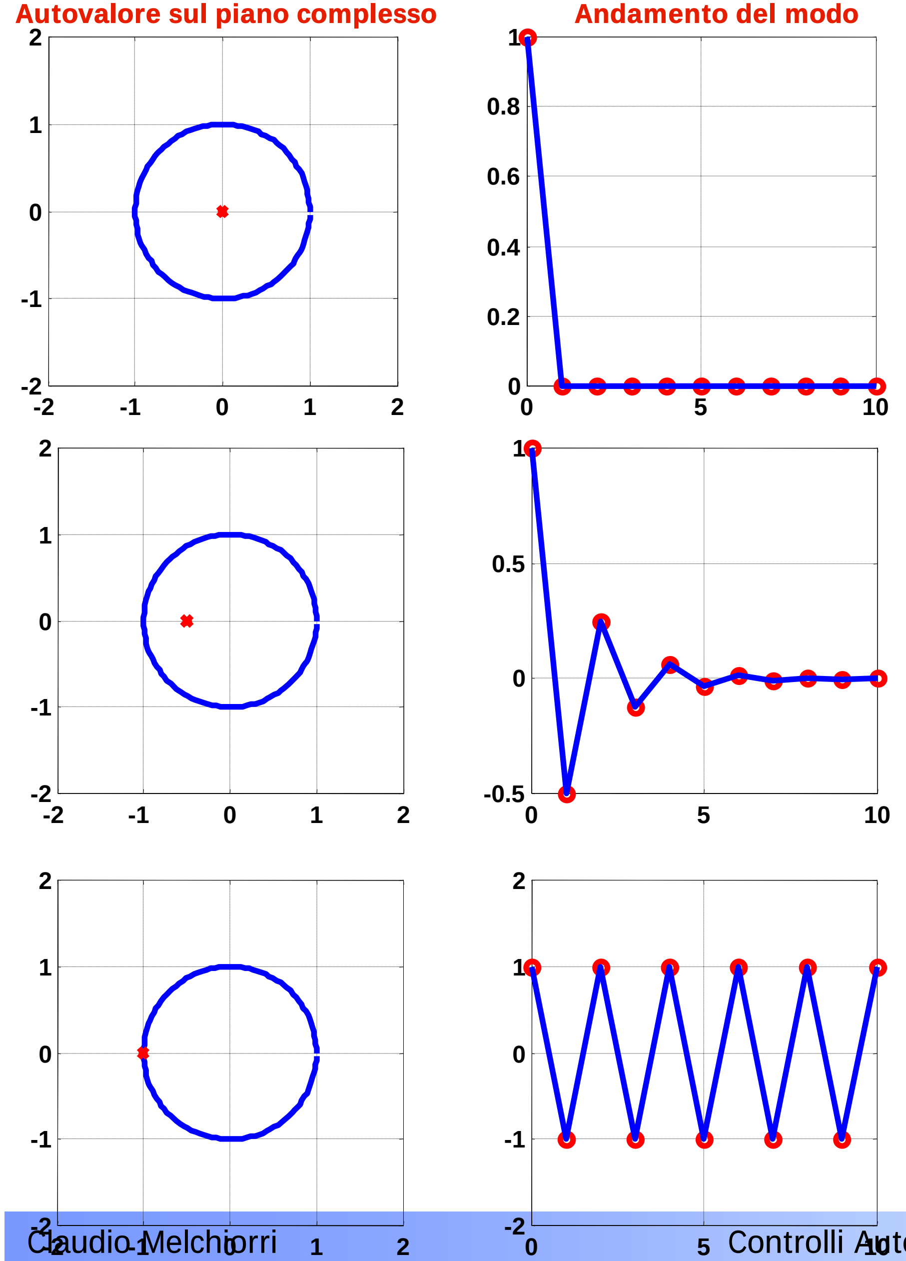
Analisi Modale



Sistemi tempo discreto

Autovalori reali semplici

λ^k



$\lambda = 0$

$\lambda = -0.5$

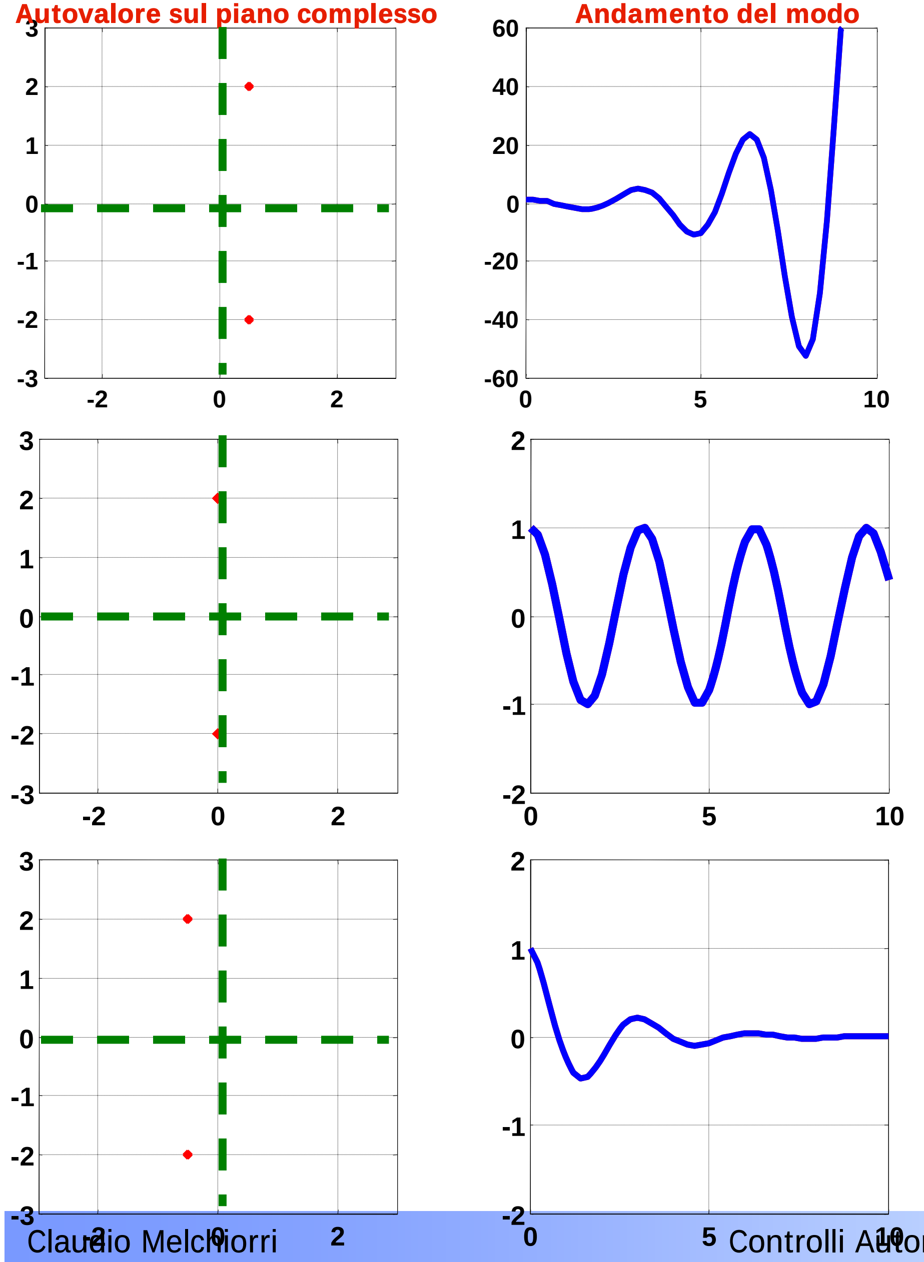
$\lambda = -1$

Sistemi tempo discreto

Autovalori reali semplici

λ^k

Analisi Modale



$\lambda = 0.5 \pm 2j$

Sistemi tempo continuo

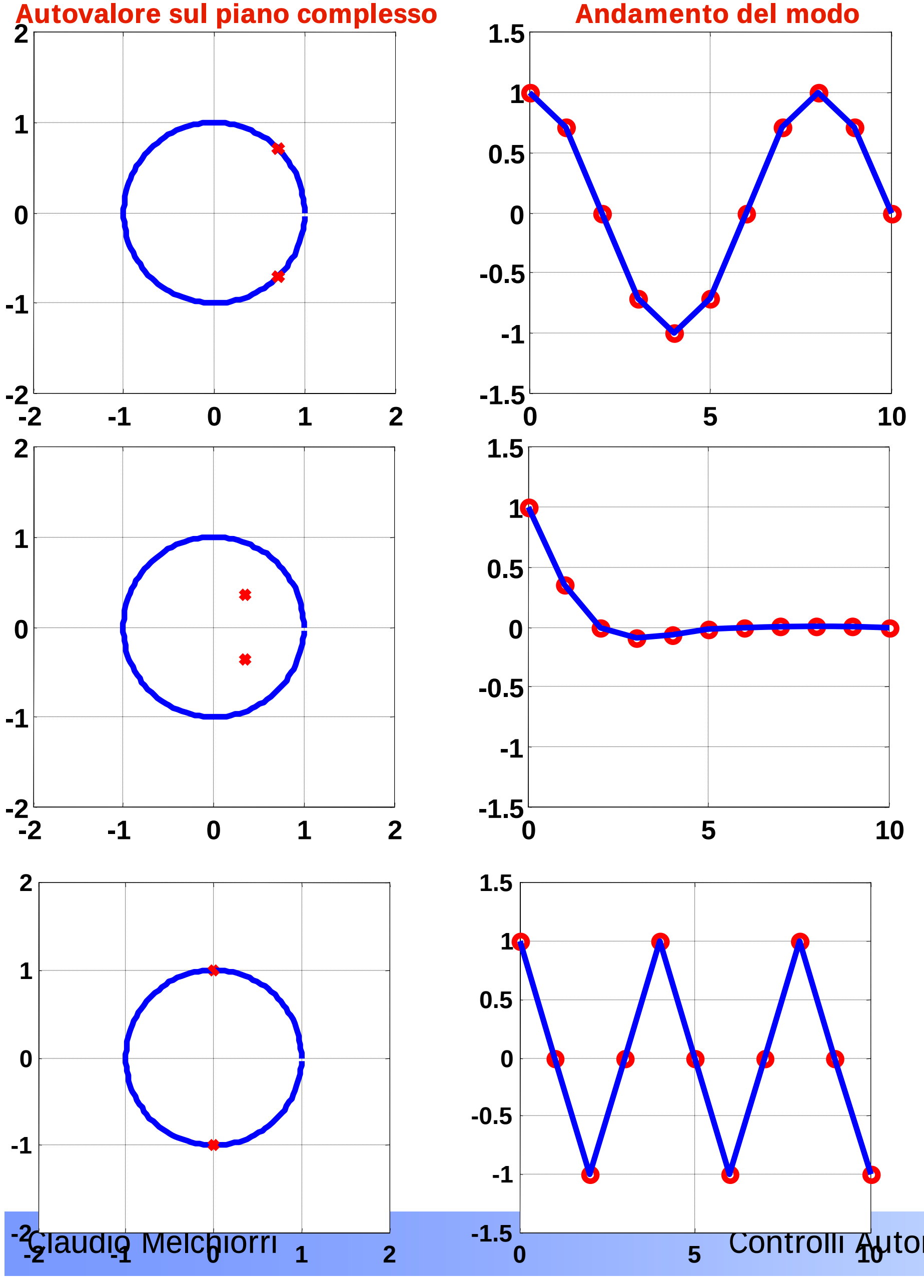
Autov. complessi semplici

$\lambda = \pm 2j$

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$\lambda = -0.5 \pm 2j$

Analisi Modale



$\lambda = e^{\pm j\,\pi/4}$

Sistemi tempo discreto

Autov. complessi semplici

$e^{\sigma\, t} \cos(k\,\omega)$

$\lambda = 0.5\, e^{\pm j\,\pi/4}$

$\lambda = e^{\pm j\,\pi/2}$

Analisi Modale – Autovalori multipli

- Nel caso tempo continuo si ha: $e^{At} = diag\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \ldots, e^{J_n t}\}$

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{\mu_i-1}}{(\mu_{i-1})!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & & \frac{t^{\mu_i-2}}{(\mu_{i-2})!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & & \frac{t^{\mu_i-3}}{(\mu_{i-3})!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

➡ ***I modi del sistema sono***

$$e^{\lambda_i t}, \; te^{\lambda_i t}, \; \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}, \; \ldots, \; \frac{t^{\mu_{i-1}}}{(\mu_{i-1})!}e^{\lambda_i t}$$

- Nel caso tempo discreto si ha: $A_d^k = diag\{J_1^k, J_2^k, \ldots, J_n^k\}$

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu_i+2)}{(\mu_i-1)!}\lambda_i^{k-\mu_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

➡ ***I modi del sistema sono*** $\lambda_i^k, \; k\lambda_i^{k-1}, \; \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2}, \; \ldots, \; \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu_i+2)}{(\mu_i-1)!}\lambda_i^{k-\mu_i+2}$

Analisi Modale – Autovalori multipli

- *Invarianza:* se lo stato iniziale x_o appartiene al sottospazio generato da una catena (miniblocco) relativa ad un autovalore λ, allora la traiettoria è completamente contenuta nel medesimo sottospazio.

- *Interdipendenza:* non è possibile in alcun modo eccitare singolarmente i modi appartenenti ad un miniblocco di Jordan

- Sia x_0 lo stato iniziale

Sistema tempo continuo

$$\begin{cases} x_1(t) &= e^{\lambda t}x_{10} + te^{\lambda t}x_{20} + \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}x_{30} + \ \ldots + \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_{i-1})!}e^{\lambda t}x_{\mu 0} \\ x_2(t) &= e^{\lambda t}x_{20} + te^{\lambda t}x_{30} + \ \ldots + \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_{i-2})!}e^{\lambda t}x_{\mu 0} \\ \ldots & \\ x_\mu(t) &= e^{\lambda t}x_{\mu 0} \end{cases}$$

Sistema tempo discreto

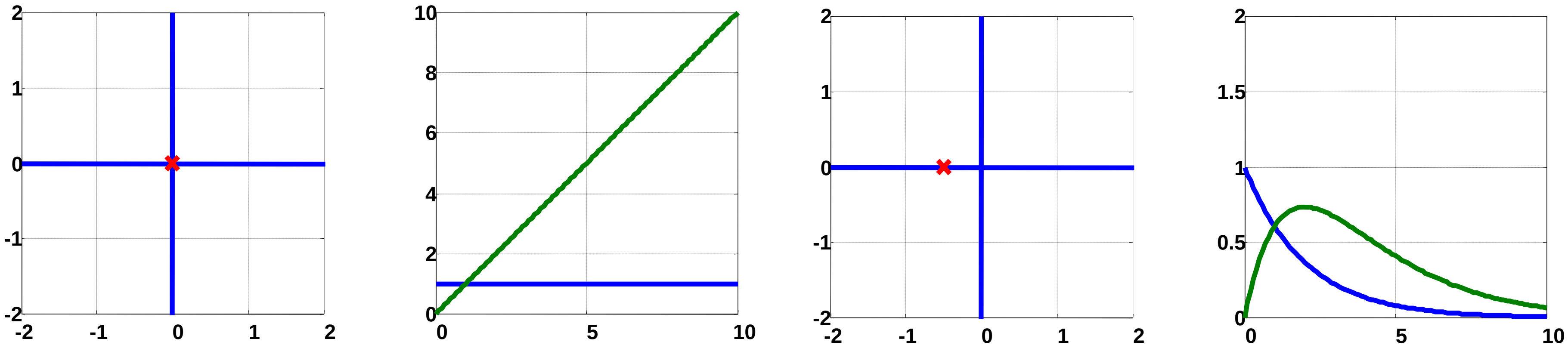
$$\begin{cases} x_1(k) &= \lambda_i^k x_{10} + k\lambda_i^{k-1}x_{20} + \ldots, + \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu_i+2)}{(\mu_i-1)!}\lambda_i^{k-\mu_i+1}x_{\mu 0} \\ x_2(k) &= \lambda_i^k x_{10} + \ldots, + \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu_i+3)}{(\mu_i-1)!}\lambda_i^{k-\mu_i+2}x_{\mu 0} \\ \ldots & \\ x_\mu(k) &= \lambda_i^k x_{\mu 0} \end{cases}$$

Analisi Modale - Esempio

- Sia dato un sistema in forma di Jordan con autovalore λ di molteplicità 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} x_{10} + t e^{\lambda t} x_{20}, & x_{10} = 1 \\ x_2(t) = e^{\lambda t} x_{20}, & x_{20} = 1 \end{cases}$$



Modi $m_1 = e^{\lambda t}$ ed $m_2 = t\, e^{\lambda t}$ con $\lambda = 0$

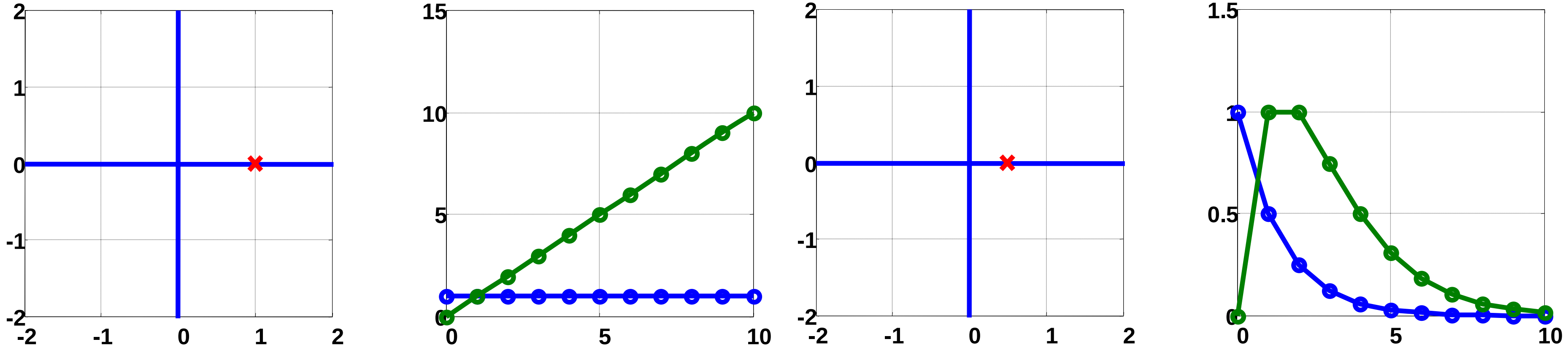
Modi $m_1 = e^{\lambda t}$ ed $m_2 = t\, e^{\lambda t}$ con $\lambda = -0.5$

Analisi Modale - Esempio

- Sia dato un sistema in forma di Jordan con autovalore λ di molteplicità 2

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \lambda^k x_{10} + k\lambda^{k-1} x_{20}, & x_{10} = 1 \\ x_2(k+1) = \lambda^k x_{20}, & x_{20} = 1 \end{cases}$$



Modi $m_1 = \lambda^k$ ed $m_2 = k\,\lambda^{k-1}$ con $\lambda = 1$

Modi $m_1 = \lambda^k$ ed $m_2 = k\,\lambda^{k-1}$ con $\lambda = 0.5$

- Sulla base della forma reale di Jordan, è possibile considerare i modi reali corrispondenti a coppie di autovalori complessi coniugati con grado di molteplicità maggiore di uno.

- **Caso tempo discreto**

$$\begin{cases} |\lambda|^k \cos(k\theta) \\ |\lambda|^k \sin(k\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} k|\lambda|^{k-1} \cos((k-1)\theta) \\ k|\lambda|^{k-1} \sin((k-1)\theta) \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu+2)}{(\mu-1)!}|\lambda_i|^{k-\mu+1} \cos((k-\mu+1)\theta) \\ \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu+2)}{(\mu-1)!}|\lambda_i|^{k-\mu+1} \sin((k-\mu+1)\theta) \end{cases}$$

- **Caso tempo continuo**

$$\begin{cases} e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} t e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ t e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1!)} e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1!)} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{cases}$$

- Dato un SL stazionario (tempo continuo o tempo discreto), il modo *m(t)* (reale o complesso) definito per $t \geq 0$ è:
  - Convergente se:
    $$\lim_{t\to\infty} |m(t)| = 0$$
  - Limitato ma non convergente, se ∃ un numero reale $M > 0$ tale che
    $$0 < |m(t)| < M$$
  - Non limitato se $\forall M > 0$, esiste t tale che
    $$|m(t)| > M$$

- *Proposizione 1*: I modi del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ sono:
  - Convergenti sse tutti $\lambda(A)$ hanno parte reale < 0
  - Limitati sse tutti $\lambda(A)$ hanno parte reale ≤ 0 e quelli a parte reale nulla sono associati a miniblocchi di Jordan di dimensione unitaria (radici semplici del polinomio minimo)

- *Proposizione 2*: I modi del sistema $x(k+1) = Ax(k)$ sono:
  - Convergenti sse tutti $\lambda(A)$ hanno modulo < 1
  - Limitati sse tutti $\lambda(A)$ hanno modulo ≤ 1 e quelli a modulo = 1 sono associati a miniblocchi di Jordan di dimensione unitaria (radici semplici del polinomio minimo)

Analisi modale – Modi dominanti

- L'evoluzione libera del sistema lineare

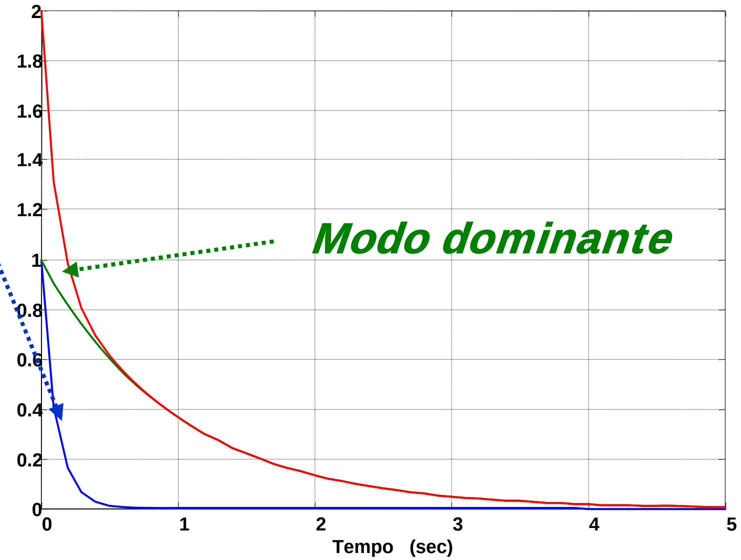
$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad\qquad x(k+1) = Ax(k)$$

a partire dallo stato iniziale $x(0) = x_0$ è data da

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad\qquad x(k) = A^k x_0$$

al tendere di t (di k) all'infinito, i modi del sistema tendono a zero, rimangono costanti o divergono a seconda del valore degli autovalori.

- Alcuni di essi, però, tendono a zero più rapidamente rispetto ad altri, per cui la loro influenza sul comportamento asintotico del sistema diventa trascurabile all'aumentare del tempo



Analisi modale – Modi dominanti

- Consideriamo per semplicità il caso di autovalori reali distinti

- ***Definizione:*** Siano λ_i gli autovalori della matrice *A*. L'autovalore λ_1 è *l'autovalore dominante* della matrice *A* se vale la seguente relazione:

  - *Caso tempo continuo* $$Re\{\lambda_1\} > Re\{\lambda_2\} > \ldots > Re\{\lambda_n\}$$

  - *Caso tempo discreto* $$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$$

- ***Proprietà.*** Al tendere di *t* (di *k*) all'infinito, l'evoluzione libera *x(t)* [*x(k)*] di un sistema lineare tempo continuo [tempo discreto] tende ad appiattirsi lungo il sottospazio corrispondente all'autovalore dominante, cioè l'autovalore λ_1 a parte reale [modulo] maggiore.

- Siano v_i gli autovettori associati agli autovalori λ_i. Dato che gli autovettori v_i costituiscono una base dello spazio degli stati, una qualsiasi condizione iniziale x_0 può essere espressa come somma delle sue componenti lungo i v_i

$$x_0 = x_{0,1}v_1 + x_{0,2}v_2 + \ldots + x_{0,n}v_n = \sum_{i=1}^{n} x_{0,i}v_i$$

dove le componenti $x_{0,i}$ si possono esprimere come

$$x_{0,i} = v_i^{*T} x_0$$

cioè come prodotto scalare tra x_0 e le righe v^*_i di T^{-1}

$$T = \begin{bmatrix} v_1, & v_2, & \ldots, & v_n \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^{*T}, \\ v_2^{*T}, \\ \vdots, \\ v_n^{*T} \end{bmatrix}$$

- Le evoluzioni libere $x(t)$ e $x(k)$ corrispondenti alla condizione iniziale x_0 sono

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{0,1}e^{\lambda_1 t}v_1 + x_{0,2}e^{\lambda_2 t}v_2 + \ldots x_{0,n}e^{\lambda_n t}v_n \\ x(k) &= x_{0,1}\lambda_1^k v_1 + x_{0,2}\lambda_2^k v_2 + \ldots x_{0,n}\lambda_n^k v_n \end{aligned}$$

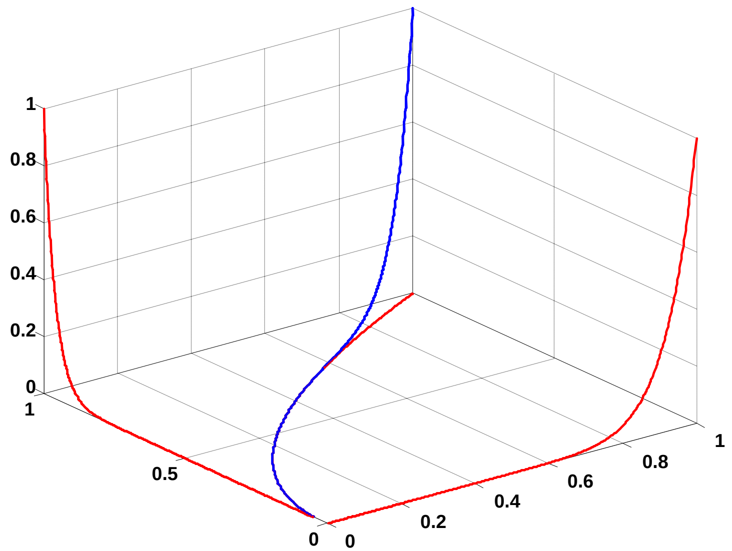
Analisi modale – Modi dominanti

- Le evoluzioni libere x(t) e x(k) corrispondenti alla condizione iniziale x_0 sono

$$x(t) = x_{0,1}e^{\lambda_1 t}v_1 + x_{0,2}e^{\lambda_2 t}v_2 + \ldots + x_{0,n}e^{\lambda_n t}v_n \underset{t \longrightarrow \infty}{\approx} x_{0,1}e^{\lambda_1 t}v_1$$

$$x(k) = x_{0,1}\lambda_1^k v_1 + x_{0,2}\lambda_2^k v_2 + \ldots + x_{0,n}\lambda_n^k v_n \underset{k \longrightarrow \infty}{\approx} x_{0,1}\lambda_1^k v_1$$

- Indipendentemente dalla condizione iniziale x_0, se $x_{0,1} \neq 0$ l'evoluzione del sistema tende verso l'autospazio corrispondente al polo (modo) dominante



Analisi modale – Modi dominanti

- Nel caso di autovalori complessi coniugati, la coppia di autovalori $\lambda_{1,2}=\sigma \pm j\,\omega$ è detta dominante se (tempo continuo)

$$Re(\lambda_1) = Re(\underbrace{\lambda_1^*}_{\lambda_2}) > Re(\lambda_3) \geq Re(\lambda_4) \geq \ldots \geq Re(\lambda_n)$$

- Se v_1 è l'autovettore complesso corrispondente a λ_1 e v_{1R}, v_{1I} le sue componenti reali ed immaginarie, si può dimostrare che

$$x(t) \underset{t \to \infty}{\approx} e^{\sigma t} \left[v_{1R}, \;\; v_{1I} \right] \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix}$$

cioè l'evoluzione libera del sistema tende verso il sottospazio generato dai vettori v_{1R} e v_{1I}.

- Considerazioni simili valgono anche nel caso di sistemi tempo-discreti con autovalori complessi coniugati dominanti.

Analisi modale - Esempio

- Determinare il sottospazio corrispondente al modo dominante del sistema dinamico LS tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) = A\,x(t)$$

- Polinomio caratteristico di *A*:

$$det(\lambda I - A) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-1)+1] = (\lambda-2)^3$$

- Vi sono quindi tre autovalori coincidenti: λ = 2. Il corrispondente autovettore v_1 si ottiene risolvendo il sistema

$$(2I - A)v_1 = 0 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_1 = 0 \;\rightarrow\; v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left(v_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Analisi modale - Esempio

- Gli autovettori generalizzati v_2 e v_3 si ricavano da

$$\begin{cases} (A-2I)\,v_2 = v_1 \\ (A-2I)\,v_3 = v_2 \end{cases} \rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Utilizzando la matrice di trasformazione

$$T = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$A_1 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^1(t) = e^{A_1 t}x_0^1 = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} x_1^1 + t x_2^1 + x_3^1 \frac{t^2}{2} \\ x_2^1 + t x_3^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix}$$

- Se $x_3 \neq 0$ si ha che

$$x^1(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} x_1^1\frac{2}{t^2} + x_2^1\frac{2}{t} + x_3^1 \\ x_2^1\frac{2}{t^2} + x_3^1\frac{2}{t} \\ x_3^1\frac{2}{t^2} \end{bmatrix} \underset{t \to \infty}{\approx} \frac{t^2}{2}e^{2t}x_3^1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1^1}$$

La direzione lungo la quale si "appiattisce" la traiettoria *x(t)* è quindi

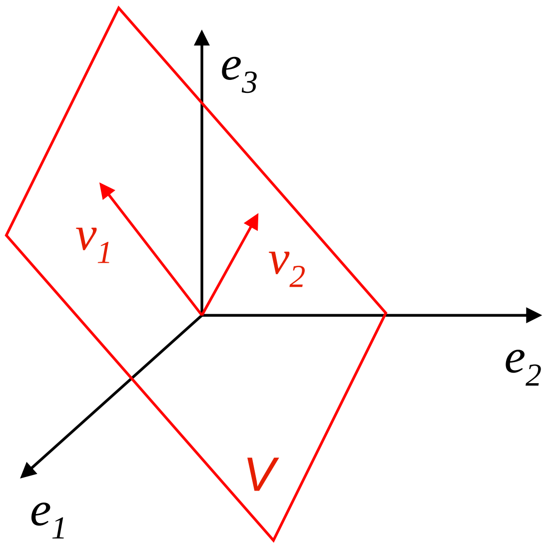
$$x(t) = Tx^1(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) \underset{t \to \infty}{\approx} \frac{t^2}{2}e^{2t}x_3^1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

Invarianti

In termini matematici, un *invariante* è un aspetto, una proprietà, o una caratteristica che non cambia se soggetta ad una trasformazione.

Esempi:

- Parte reale e valore assoluto di un numero complesso con la operazione di coniugazione;
- Il grado di un polinomio con una trasformazione lineari delle variabili;
- Gli autovalori o i valori singolari di una matrice con una trasformazione di similitudine;
- La norma Euclidea (lunghezza di vettori) con una trasformazione ortonormale (rotazione);
- L'angolo tra due vettori con una trasformazione ortonormale (rotazione);



Dati:

- R^3: spazio vettoriale
- $\{e_1, e_2, e_3\}$: base principale (colonne della matrice I)
- V: sottospazio
- $\{ v_1, v_2\}$: base del sottospazio V
- $V = [v_1 . v_2]$: matrice di base del sottospazio V

Data una matrice A $n \times n$, lo spazio V si dice *invariante in A* se è

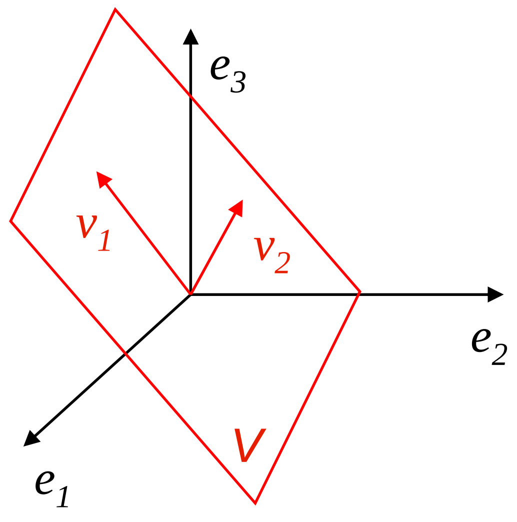
$$A\,V \subseteq \mathrm{V}$$

Proprietà:

- La somma di due invarianti è un invariante
- L'intersezione di due invarianti è un invariante
- V è invariante in A se

$$\boxed{\forall x \in V \quad \rightarrow \quad Ax \in V}$$

Invarianti



Esempio: Siano date $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

V è invariante in A se $\forall x \in V \rightarrow Ax \in V$

È immediato verificare in questo caso che questa proprietà vale.

$$A\,v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in im\{V\} \qquad A\,v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in im\{V\}$$

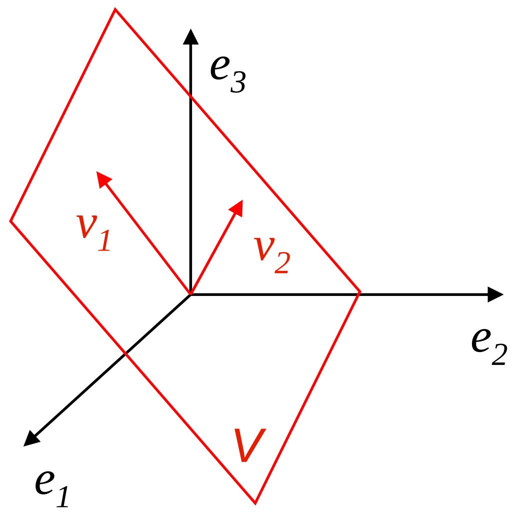
Esempio: Siano date $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

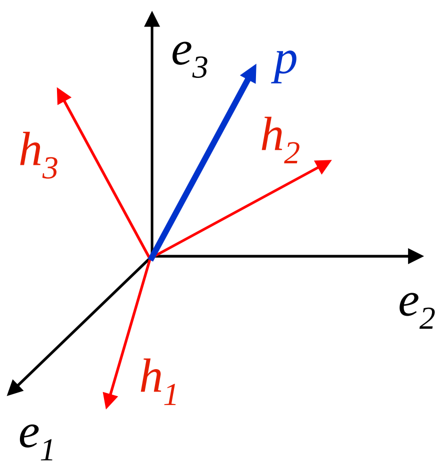
V è invariante in A se $\forall x \in V \rightarrow Ax \in V$

In questo caso questa proprietà non vale.

$$A\,v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin im\{V\} \qquad A\,v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin im\{V\}$$

Alcune proprietà geometriche





Cambiamenti di base

- Al posto della base e_1, e_2, e_3 si assume una nuova base h_1, h_2, h_3 con $T = [h_1, h_2, h_3]$ non singolare.

- Si indica con x il vettore delle componenti di un punto p nella base principale, con z le componenti nella nuova. Si ha

$$x = T\,z, \qquad z = T^{-1}\,x$$

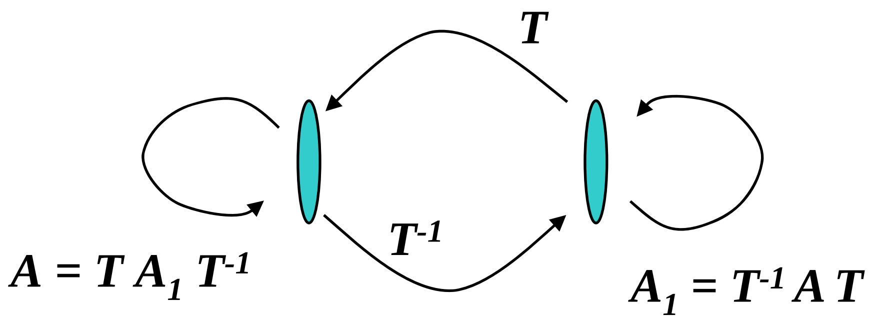
- Nella nuova base, ad una matrice A $n \times n$ corrisponde la matrice A_1

$$A_1 = T^{-1} A\, T$$

Infatti

$$\begin{aligned} x' &= Ax \qquad z' = A_1 z \\ Tz' &= ATz \\ z' &= T^{-1}ATz = A_1 z \\ \rightarrow A_1 &= T^{-1}AT \end{aligned}$$

Alcune proprietà geometriche



- Data una matrice A, sia dato un invariante V rispetto ad A con dimensione $k < n$, ed una sua matrice di base V, n x k. Assumendo

$$T = [V, V']$$

non singolare, la matrice $A_1 = T^{-1} A\, T$ ha la struttura

$$A_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{c|c} \;k\; & \;n-k\; \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{c} k \\ \hline n-k \end{array} \end{array}$$

Alcune proprietà geometriche

- *Esempi:* il vettore p nella base principale $\{e_1, e_2, e_3\}$ ha componenti

$$p = [3, 2, 5]^T;$$

Sia

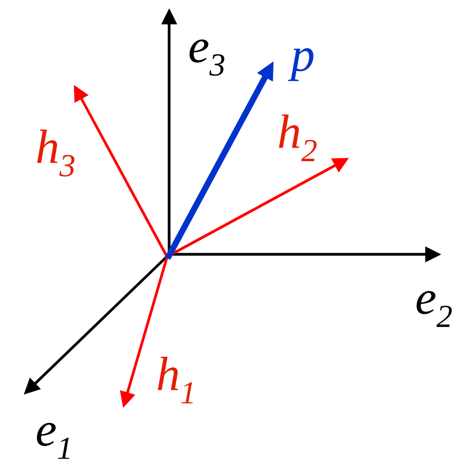
$$T = \begin{bmatrix} 0.6967 & 0 & 0.7174 \\ 0.2794 & 0.9211 & -0.2713 \\ -0.6607 & 0.3894 & 0.6417 \end{bmatrix}$$

la matrice che definisce la nuova base. Allora:

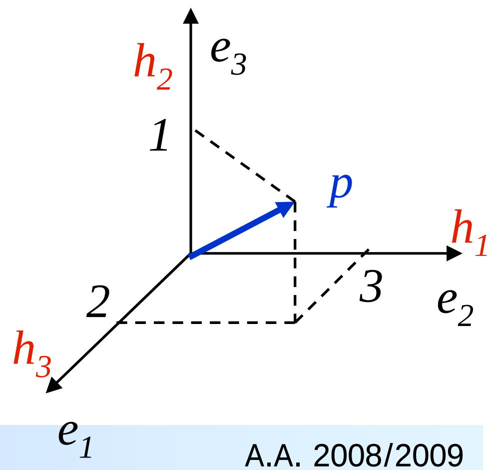
$$p' = T^{-1}\, p = [-0.6548,\ \ 3.7892,\ \ 4.8180]^T$$

con

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6967 & 0.2794 & -0.6607 \\ 0 & 0.9211 & 0.3894 \\ 0.7174 & -0.2713 & 0.6417 \end{bmatrix}$$



$$p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Alcune proprietà geometriche

- *Esempio*: data la matrice A e l'invariante descritto da V

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Si ottiene

$$T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

k = 2

n - k = 1

Alcune proprietà geometriche

- *Esempio*: data la matrice A e l'invariante descritto da V

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad V' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si ottiene

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

k = 1

n - k = 2

CONTROLLI AUTOMATICI LS

Analisi modale
FINE

Prof. Claudio Melchiorri

DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093034

e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/~cmelchiorri