CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Stabilità dei sistemi dinamici

Prof. Claudio Melchiorri

DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093034

e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

Definizioni

Ci si riferisce a sistemi dinamici non lineari e non stazionari, descritti dal modello:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Si suppone che U, U_f, X, Y siano <u>spazi vettoriali normati</u>.

Dati l'istante iniziale t_0, lo stato iniziale $x(t_0)$ e la funzione di ingresso $u(\cdot)$, si considera il *moto di riferimento*

$$\bar{x}(t) = \varphi(t, t_0, \bar{x}(t_0), \bar{u}(\cdot)) \quad , \quad t \geq t_0$$

Variazione del moto dovuta a *perturbazione dello stato iniziale:*

$$\delta x_1(t) = \varphi(t, t_0, \underline{\bar{x}(t_0) + \delta x_1(t_0)}, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}(t) \quad , \quad t \geq t_0$$

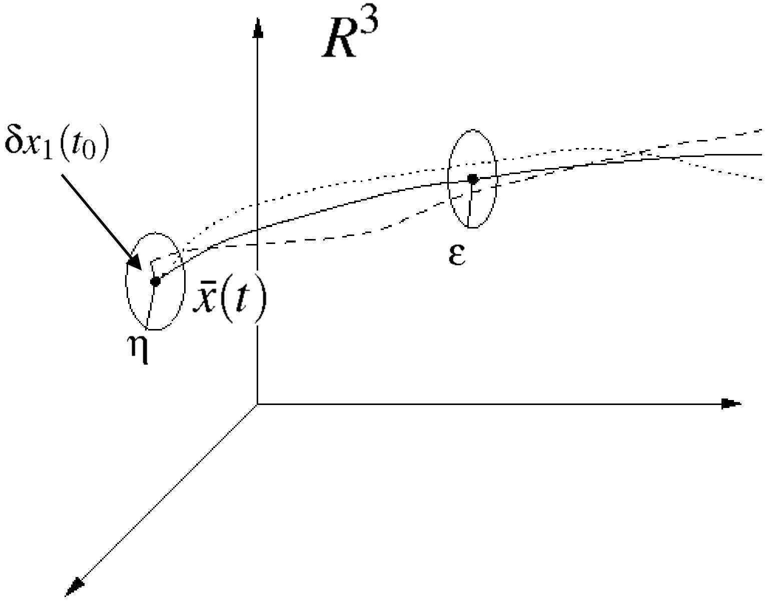
Differenza tra i moti

Variazione del moto dovuta a *perturbazione dell'ingresso:*

$$\delta x_2(t) = \varphi(t, t_0, \bar{x}(t_0), \underline{\bar{u}(\cdot) + \delta \bar{u}(\cdot)}) - \bar{x}(t) \quad , \quad t \geq t_0$$

Differenza tra i moti

Perturbazioni dello stato iniziale



Il moto $x(\cdot)$ corrispondente alla funzione di ingresso $u(\cdot)$ è *stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale* se:

$$\forall t_0, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \eta > 0 \;\; \Rightarrow$$

$$\|\delta x_1(t)\| < \varepsilon \;\; \forall t \geq t_0 \;\; se \;\; \|\delta x_1(t_0)\| < \eta$$

Esso si dice *asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale* se:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \eta > 0 \;\; \Rightarrow \|\delta x_1(t)\| < \varepsilon \;\; \forall t \geq t_0 \;\; \text{se} \;\; \|\delta x_1(t_0)\| < \eta$$

$$\lim_{t\to\infty} \|\delta x_1(t)\| = 0$$

Perturbazioni dell'ingresso

Il moto $x(\cdot)$ corrispondente alla funzione di ingresso $u(\cdot)$ è *stabile rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso* se:

$$\forall t_0 \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ \Rightarrow$$

$$\|\delta x_2(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0 \ \ se \ \ \|\delta u(t)\| < \eta \ , \ \ t \geq t_0$$

Note

1. La definizione di stabilità si riferisce ad *un particolare moto*, individuato dalla terna t_0, $x(t_0)$, $u(\cdot)$.

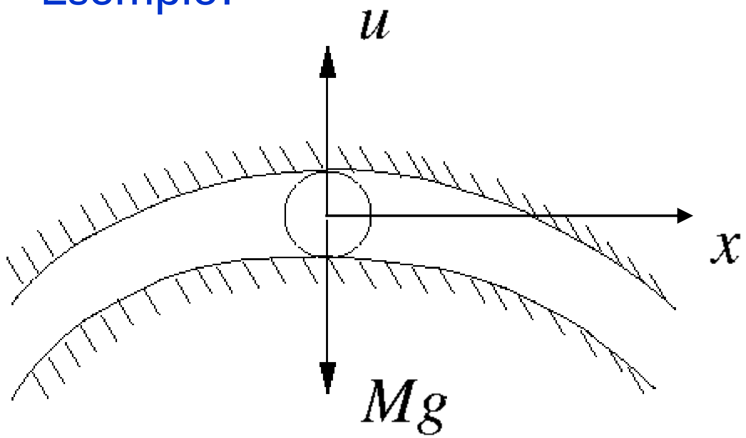
2. Le definizioni precedenti possono riferirsi alla funzione di risposta $\gamma(t,t_0,x(t_0),u(\cdot))$ in luogo di $\varphi(t,t_0,x(t_0),u(\cdot))$.

3. La stabilità può essere riferita ad *uno stato di equilibrio* $x(t)=\varphi(t,t_0,x(t_0),u(\cdot))$ che è *un particolare moto del sistema*.

Note

4. Se il sistema considerato è stazionario, la stabilità non dipende da t_0 ma solo da $x(t_0), u(\cdot)$
5. Un particolare moto può corrispondere a diverse funzioni di ingresso e la sua stabilità può dipendere dalla particolare funzione di ingresso cui si riferisce.

Esempio:



$x=0,\ u(\cdot)$ è uno stato di equilibrio:

$u \geq Mg$ stabile

$u < Mg$ instabile

6. La stabilità, così come è stata definita, è una stabilità *in piccolo* (per piccole perturbazioni) o *locale*.

Stabilità in grande: perturbazioni dello stato iniziale

Si considera di nuovo la definizione di stabilità asintotica rispetto a perturbazioni dello stato iniziale. Se risulta

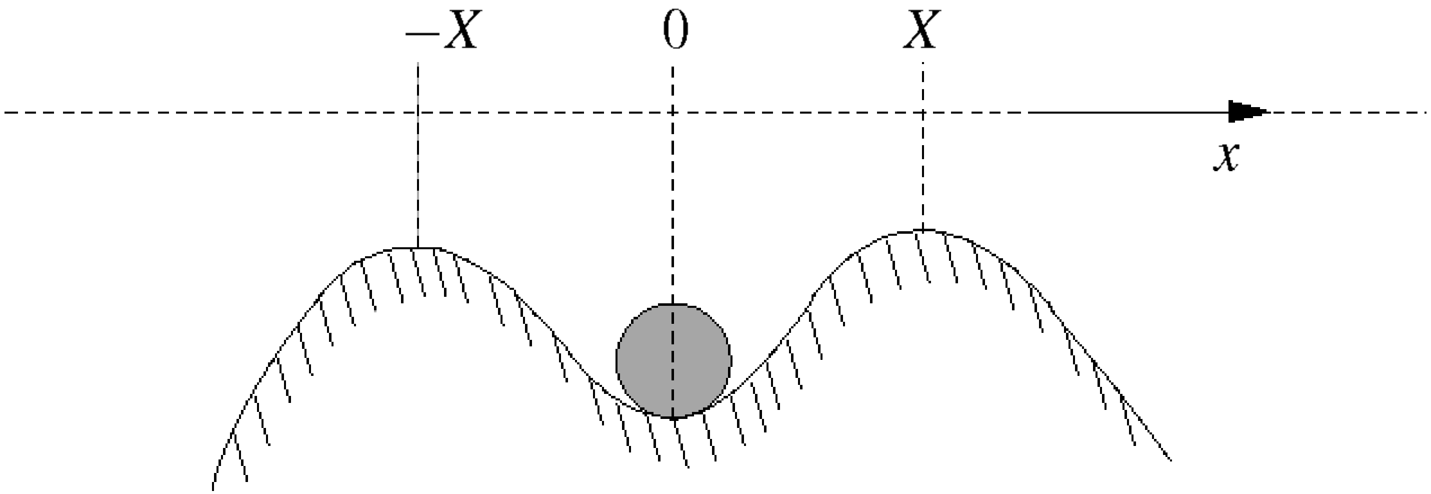
$$\lim_{t \to \infty} \|\delta x_1(t)\| = 0$$

$\forall\, \delta x_1(t_0)$ tale che $x(t_0)+\delta x_1(t_0) \in X_0(t_0, x(t_0), u(\cdot))$, X_0 è detto *dominio di stabilità asintotica* relativo a $t_0, x(t_0), u(\cdot)$.

Se $X_0(t_0, x(t_0), u(\cdot)) = X$ (intero spazio degli stati) il moto $x(\cdot)$ corrispondente alla funzione di ingresso $u(\cdot)$ si dice *globalmente asintoticamente stabile.*

Se ciò è vero per ogni t_0 e ogni $u(\cdot)$ il sistema Σ si dice *globalmente asintoticamente stabile.*

- **Esempio:**



$x=0$ è un punto di equilibrio il cui dominio di stabilità è $-X < x < X$.

Stabilità in grande: perturbazioni dell'ingresso

Si consideri ora nuovamente la definizione di stabilità rispetto a variazioni della funzione di ingresso.

Il sistema si dice *stabile ingresso limitato – stato limitato* (i.l.s.l.) in relazione al moto t_0, $x(t_0)$, $u(\cdot)$ se esistono due numeri reali positivi M_u e M_x, in genere funzioni di t_0, $x(t_0)$, $u(\cdot)$, tali che sia

$$\|\delta x_2(t)\| < M_x \quad , \quad t \geq t_0$$

per ogni $\delta u(\cdot)$ tale che $\|\ \delta u(t)\ \| < M_u \ , t \geq t_0$.

Riferendosi alla funzione di risposta $\gamma(t,t_0,x(t_0),u(\cdot))$ si definisce in modo analogo la stabilità ingresso limitato – uscita limitata (i.l.u.l.).

Stabilità di uno stato di equilibrio

Si considera un sistema libero (o privo di ingresso)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad (1)$$

con stato zero di equilibrio, cioè

$$0 = f(0, t) \quad \forall t \geq t_0$$

Def. 1: Lo stato zero del sistema (1) si dice *stabile secondo Lyapunov* all'istante t_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$\|x(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

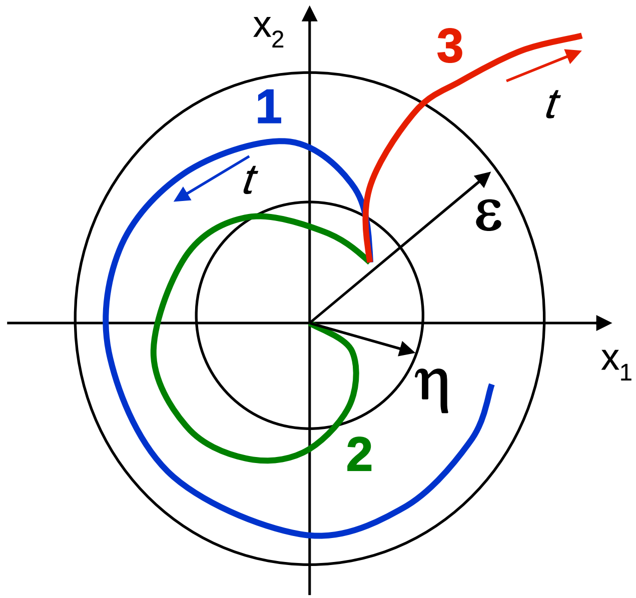
Def. 2: Lo stato zero del sistema (1) si dice *asintoticamente stabile secondo Lyapunov* all'istante t_0 se è stabile e se

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

Def. 3: Lo stato zero del sistema (1) si dice *globalmente asintoticamente stabile* o *asintoticamente stabile in grande* secondo Lyapunov all'istante t_0 se è stabile e se

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0, \qquad \forall x(t_0) \in X$$

in cui X è l'intero spazio degli stati. In questo caso, non esistendo alcun altro stato di equilibrio oltre allo stato zero, si dice che il sistema è *globalmente asintoticamente stabile*.



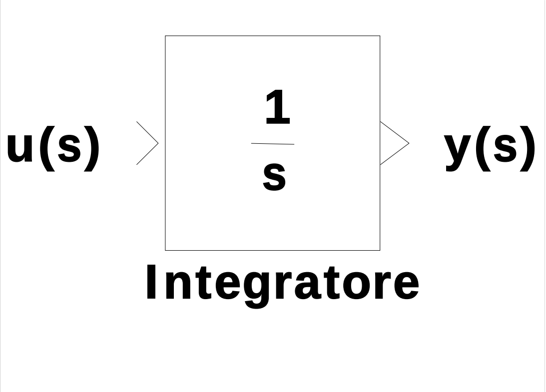
Riepilogo:

1. Stabile
2. Asintoticamente stabile
3. Instabile

Se le precedenti definizioni sono soddisfatte per ogni istante iniziale $t_1 \in [t_0, \infty]$, la stabilità si dice uniforme in $[t_0, \infty]$.

Esempio: l'integratore

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t) \rightarrow G(s) = \frac{1}{s} \\
y(t) &= x(t) \\
x(t) &= x_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$



Si studi l'andamento dello stato x(t) a partire da x_0 con ingresso nullo:
Dato $x_0 \rightarrow x(t) = x_0$
Data una perturbazione dello stato inziale $\delta x \rightarrow x(t) = x_0 + \delta x$
$\rightarrow$ **Le perturbazioni sull'andamento dello stato e dell'uscita sono limitate**
(globalmente stabile secondo Lyapunov – non asintoticamente)

Si studi ora l'andamento dello stato x(t) causate da perturbazioni dell'ingresso:
Dato x_0 e $u(t)=0 \rightarrow x(t) = x_0$
Data una perturbazione costante dell'ingresso $\delta u \rightarrow x(t) = x_0 + \delta u\, t$
$\rightarrow$ **Le perturbazioni sull'andamento dello stato e dell'uscita non sono limitate**, $x(t) \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$
(non stabile i.l.s.l. e non stabile i.l.u.l.)

Primo metodo di Lyapunov (linearizzazione locale)

Si considera un *sistema libero autonomo**

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \;\;,\;\; 0 = f(0) \qquad (2)$$

Se le funzioni $f(\cdot)$ sono derivabili si può scrivere, in un intorno dell'origine:

$$\dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} x(t) + f_0(x(t))$$

in cui $f_0(x(t))$ rappresenta i residui dello sviluppo in serie di Taylor. Posto

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x'=0}$$

il sistema lineare omogeneo

$$\dot{x}(t) = A\, x(t)$$

rappresenta la *linearizzazione locale* o *approssimazione locale* del sistema non lineare (2).

* un sistema è detto autonomo se è libero (senza ingressi) e non dipende esplicitamente dal tempo

Teorema: (metodo di linearizzazione di Lyapunov)

Se il sistema linearizzato è stabile in senso stretto (tutti gli autovalori di A sono nel semipiano sinistro), il punto di equilibrio è asintoticamente stabile per il sistema (2).

Se il sistema linearizzato è instabile (almeno un autovalore di A ha parte reale positiva), il punto di equilibrio è instabile per il sistema (2).

Se A presenta autovalori a parte reale nulla, la linearizzazione non fornisce informazioni sulla stabilità dell'equilibrio del punto considerato.

Definizioni

Funzioni definite positive:

Una funzione $V(x)$: $R^n \rightarrow R$ è *definita positiva* in un intorno sferico dell'origine dello spazio degli stati se

1. $V(x)$ ha derivate parziali prime continue rispetto alle componenti di x:
2. $V(0) = 0$;
3. $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Funzioni di Lyapunov:

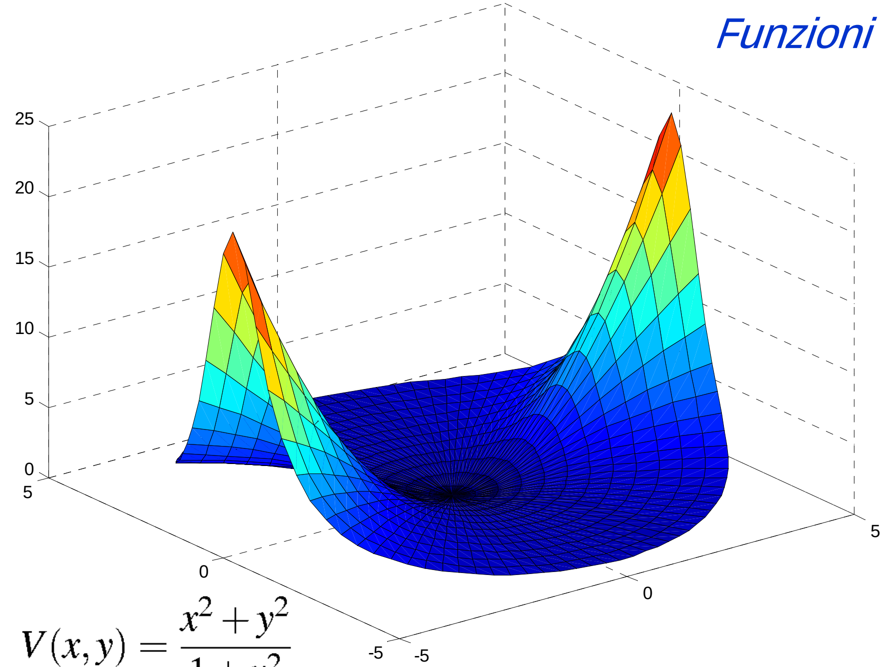
Una funzione $V(x)$: $R^n \rightarrow R$ è una *funzione di Lyapunov* in $\vartheta(0,\rho)$ per il sistema (2) se

1. $V(x)$ è definita positiva in $\vartheta(0,\rho)$;
2. $\dot{V}(x) = \langle grad\ V,\ f(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \vartheta(0,\rho)$

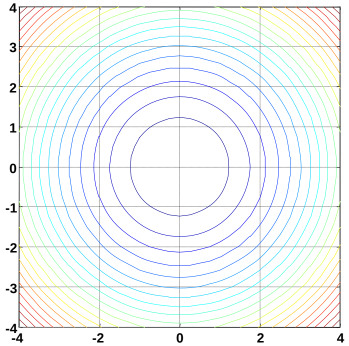
$$(\langle grad\ V,\ f(x) \rangle = \langle grad\ V,\ \dot{x}(t) \rangle)$$

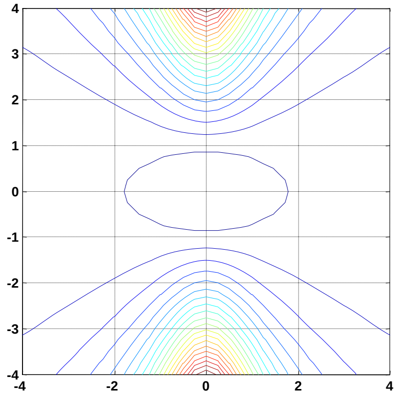
Metodo di Lyapunov

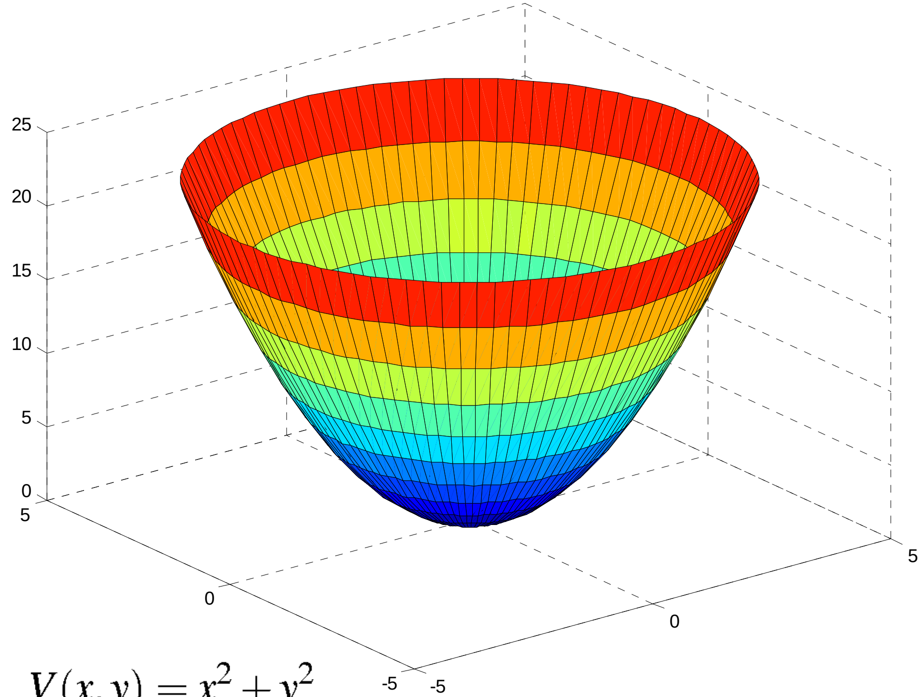
Funzioni definite positive



$$V(x,y)=\frac{x^2+y^2}{1+y^2}$$

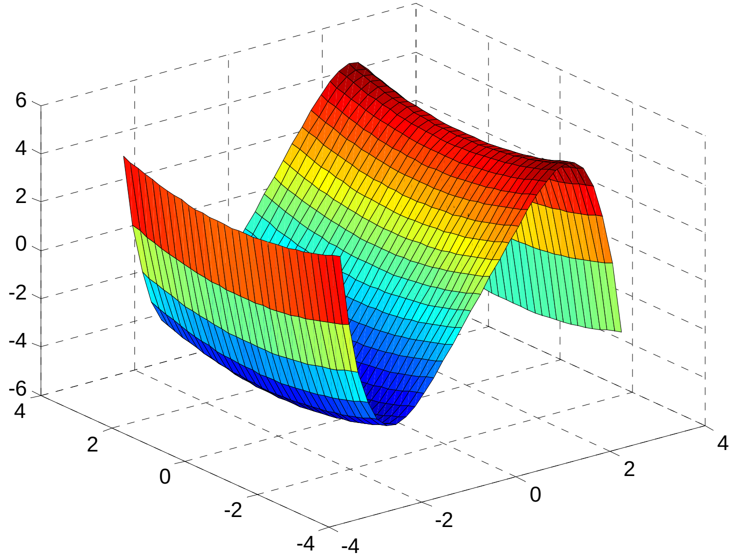




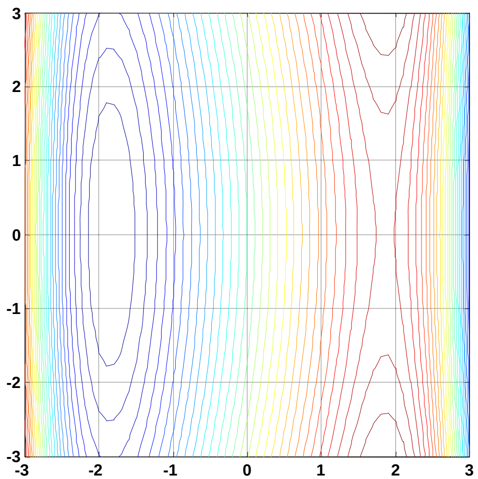


$$V(x,y)=x^2+y^2$$

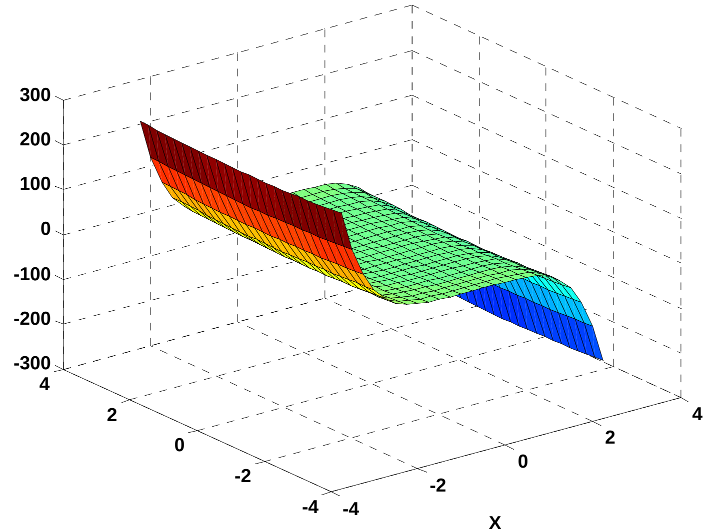
Funzione non definita



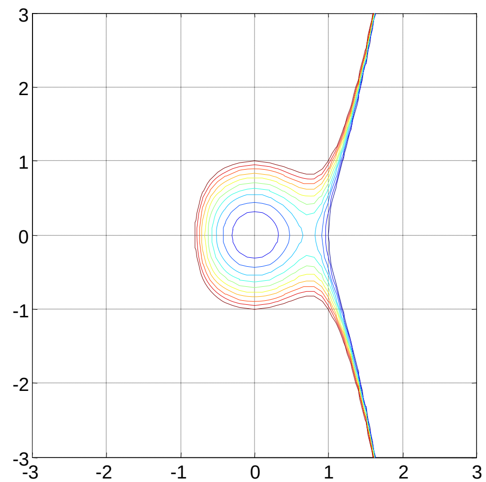
$$V(x,y) = 0.1x^2 - 0.05x^5$$



Funzione definita positiva



$$V(x,y) = x^2 + y^2 - x^5$$



Teoremi di Lyapunov

1. *(stabilità semplice):* Lo stato zero è stabile nel senso di Lyapunov se esiste una funzione di Lyapunov V in un intorno dell'origine $\vartheta(0,\rho)$.

2. *(stabilità asintotica):* Lo stato zero è asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se esiste una funzione di Lyapunov V in un intorno dell'origine $\vartheta(0,\rho)$ tale che $dV(x)/dt < 0$ per ogni $x \in \vartheta(0,\rho)$, $x \neq 0$.

3. *(stabilità asintotica globale):* Il sistema (2) è globalmente asintoticamente stabile nello stato zero se esiste una funzione di Lyapunov V definita su tutto lo spazio degli stati tale che:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \ , \quad \lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$$

(funzione di Lyapunov radialmente illimitata).

4. *(dominio di stabilità asintotica):* Sia $V(x)$ una funzione di Lyapunov e h un numero reale positivo tale che il dominio (aperto)

$$D = \{x :\ V(x) < h\}$$

sia limitato e sia $dV(x)/dt < 0 \quad \forall x \in D, x \neq 0$.

Segue che tutte le traiettorie che iniziano in D convergono asintoticamente allo stato zero.

NOTA: I precedenti teoremi si possono estendere ai sistemi non autonomi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad , \quad 0 = f(0, t)$$

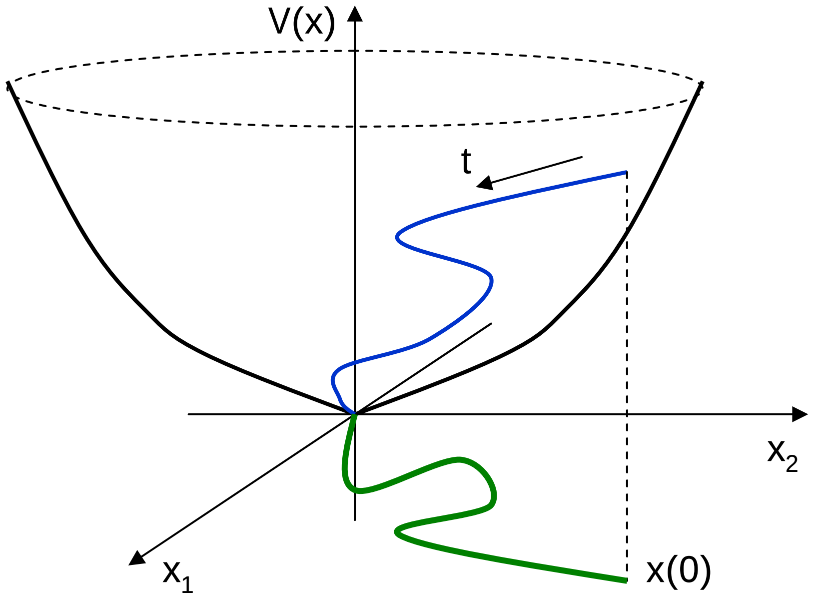
introducendo una funzione di Lyapunov di tipo $V(x,t)$, per cui

$$\dot{V}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

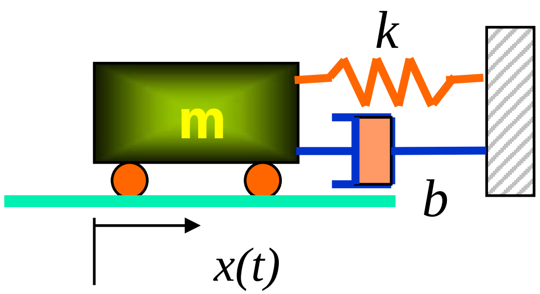
E modificando opportunamente gli enunciati per tener conto del termine $\partial V / \partial t$.

Metodo di Lyapunov

Evoluzione dello stato di un sistema autonomo e funzione di Lyapunov



Esempio: carrello con molla e smorzatore



$$z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \qquad \dot{z} = A\, z, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$V(z) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= m\,\dot{x}\,\ddot{x} + k\,x\,\dot{x} \\ &= m\,\dot{x}\left(-\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x}\right) + k\,x\,\dot{x} \\ &= -k\,\dot{x}\,x - b\dot{x}^2 + k\,x\,\dot{x} \\ &= -b\dot{x}^2 < 0 \end{aligned}$$

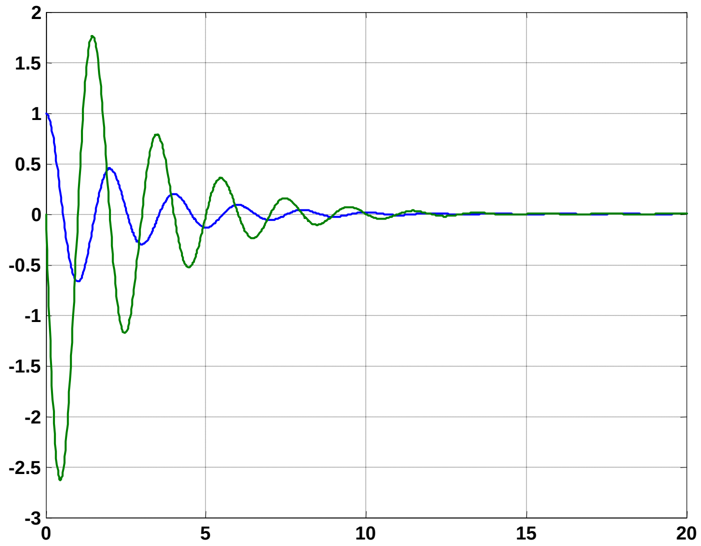
La funzione $V(x)$ decresce poiché vi è la presenza della dissipazione (termine "b"), se no $V(x)$ avrebbe un valore costante e quindi l'energia non sarebbe dissipata

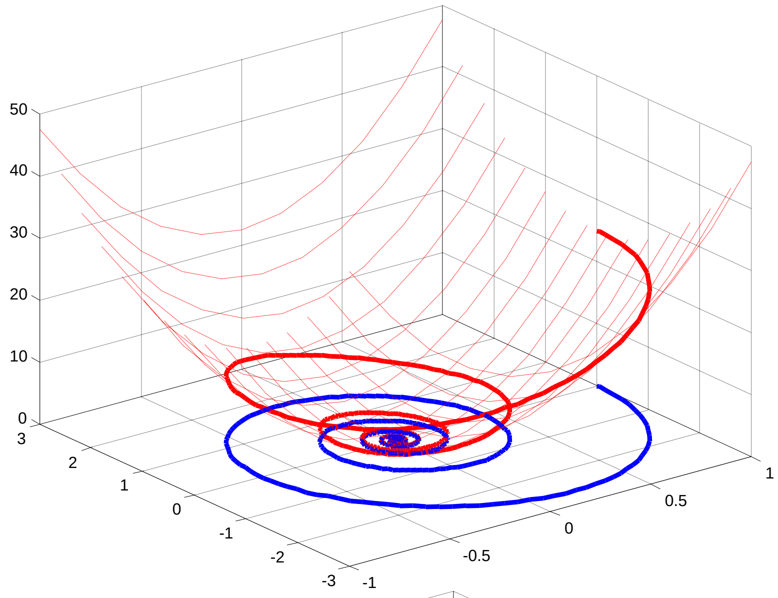
Il sistema evolve fino a che la velocità è diversa da zero, e quindi si ferma (cond. di equilibrio stabile). In questa condizione, vale (eq. diff. del sistema):

$$0 = k\,x + 0, \qquad x = 0$$

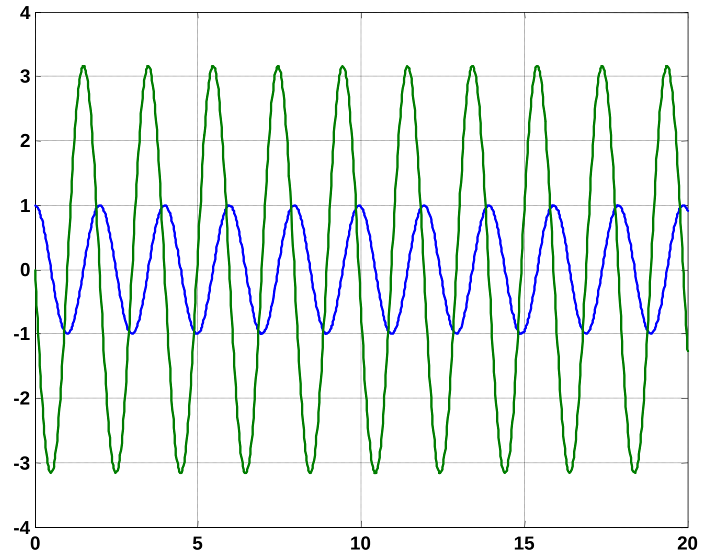
Quindi il sistema si ferma effettivamente nello stato zero.

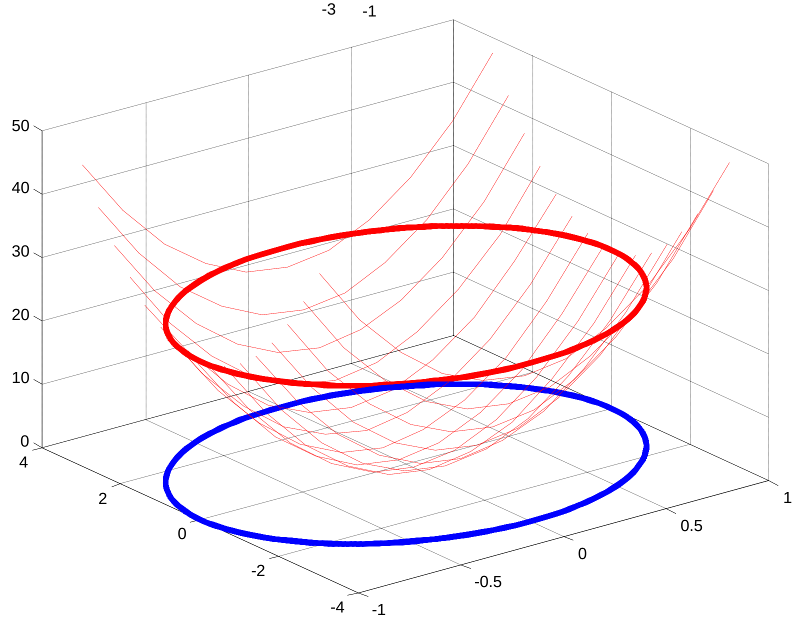
m = 5
K = 50
b = 2





m = 5
K = 50
b = 0





Sistemi del primo ordine

Si consideri il seguente sistema del primo ordine:

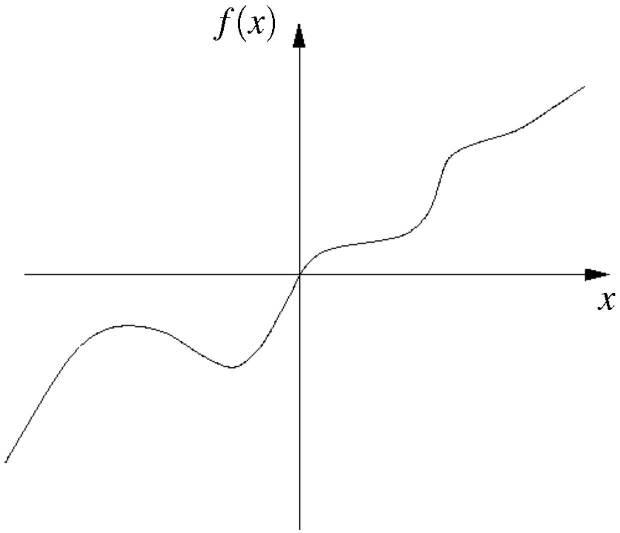
$$\dot{x} + f(x) = 0 \qquad (1)$$

con $f(x)$ continua, e la condizione:

$$x\, f(x) > 0 \quad per \quad x \neq 0 \qquad (2)$$

Si assume la funzione di Lyapunov **$V = x^2$** da cui

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = -2xf(x) < 0 \quad per \quad x \neq 0$$



L'origine $x=0$ è un punto di stabilità asintotica globale. Infatti V è illimitata per $x \to \infty$.

Applicazioni del metodo di Lyapunov

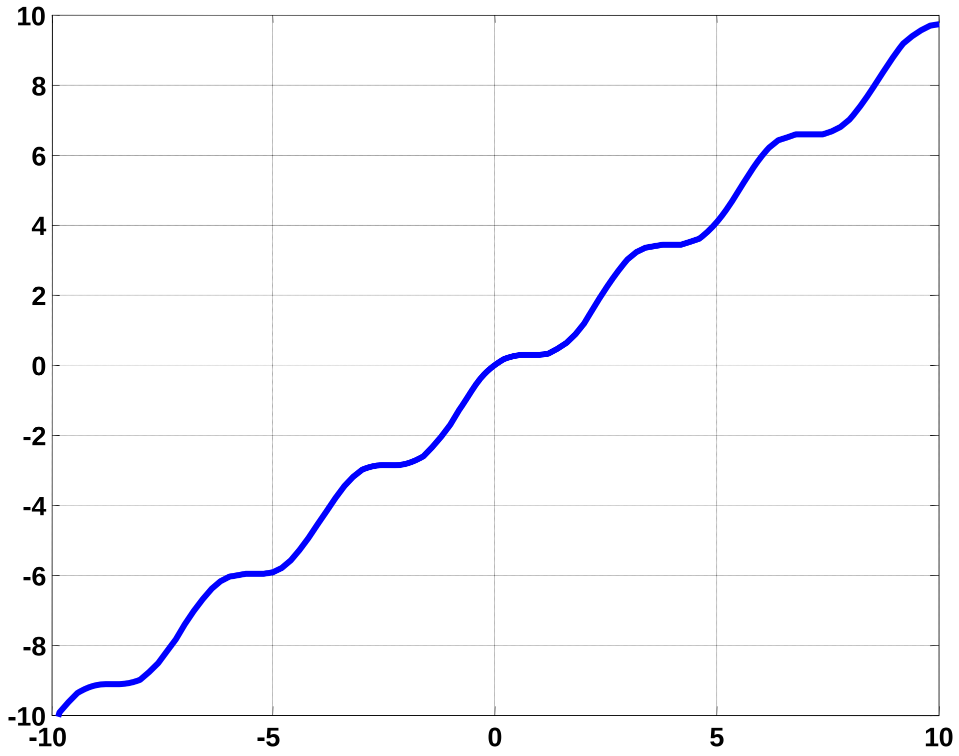
Sistemi del primo ordine: esempio

Dato il seguente sistema

$$\dot{x} = \sin^2 x - x$$

la funzione $f(x) = -\sin^2 x + x$ soddisfa la condizione (2) essendo:

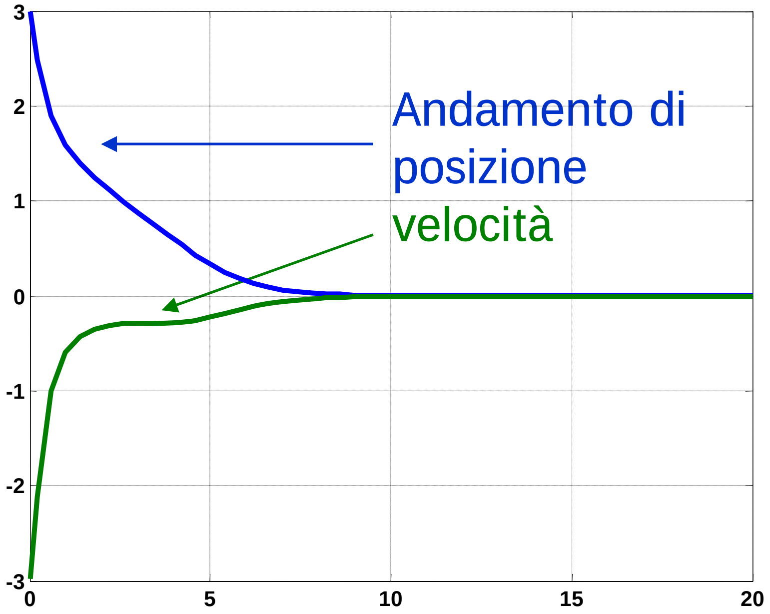
$$\sin^2(x) \leq |\sin x| \leq |x|$$

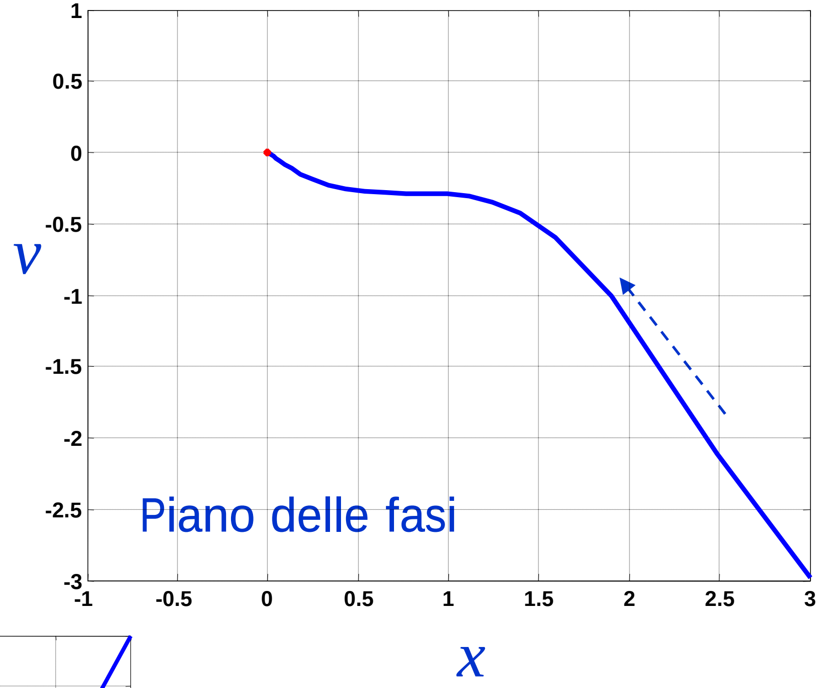


Applicazioni del metodo di Lyapunov

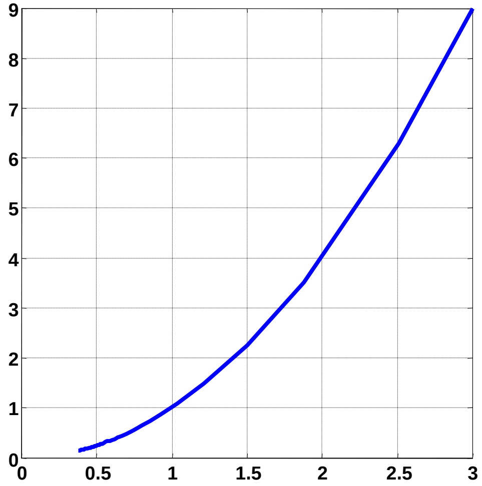
Sistemi del primo ordine: esempio

$$\dot{x} = \sin^2 x - x$$





$x_0 = 3$



Andamento di
$V(x) = x^2$

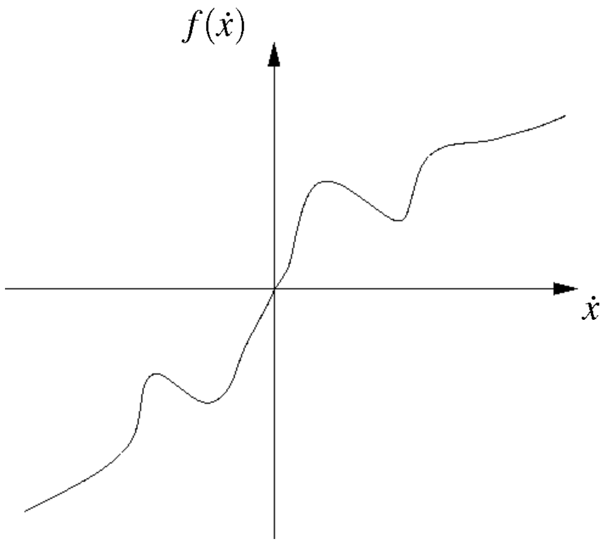
Sistemi del secondo ordine

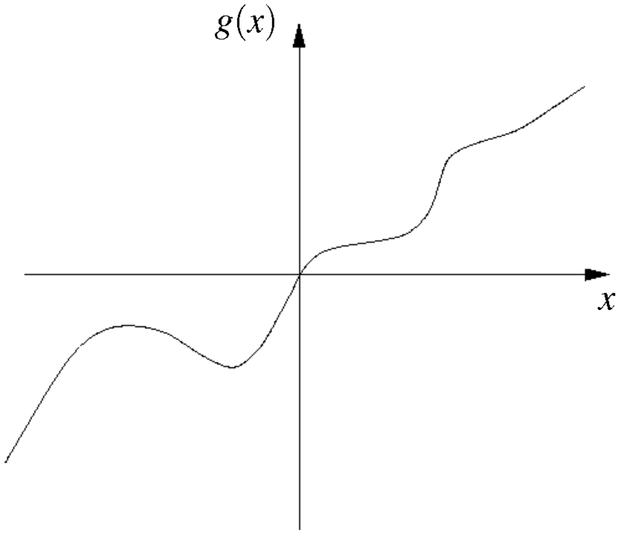
Si consideri il seguente sistema del secondo ordine:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = 0 \qquad (3)$$

con f e g continue, e le condizioni:

$$\dot{x}\, f(\dot{x}) > 0 \;\; , \;\; x\, g(x) > 0 \qquad (4)$$





Sistemi del secondo ordine

Si assume la funzione di Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x g(\rho)\, d\rho \tag{5}$$

Si ottiene:

$$\dot{V} = \dot{x}\ddot{x} + g(x)\dot{x} = -\dot{x}f(\dot{x}) - \dot{x}g(x) + g(x)\dot{x}$$

$$= -\dot{x}f(\dot{x}) < 0 \;\; per \;\; x \neq 0 \;\; (=0 \;\; per \;\; x = 0)$$

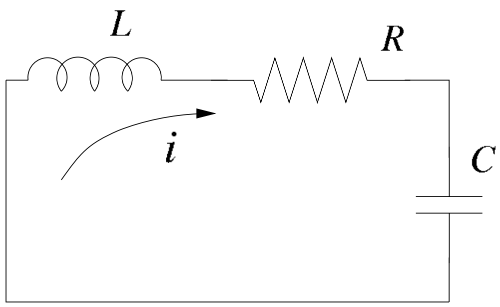
Se l'integrale

$$\int_0^x g(\rho)\, d\rho$$

è illimitato per $x \rightarrow \infty$, V è illimitata e l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Sistemi del secondo ordine: esempio

Equazioni del tipo (3) e (4) sono frequenti quando si considerano sistemi meccanici o elettrici con elementi accumulatori di energia potenziale e cinetica (massa-molla-ammortizzatore o LRC).



Si consideri il circuito in figura. L'equazione:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\, i = 0$$

è del tipo (3) e soddisfa le (4). Posto x(t)=i(t):

$$f(\dot{x}) = \frac{R}{L}\frac{di}{dt} \;\rightarrow\; \dot{x} f(\dot{x}) = \frac{R}{L}\left(\frac{di}{dt}\right)^2 > 0 \;\; \forall \dot{x}\,, \quad g(x) = \frac{1}{LC} i \;\rightarrow\; x g(x) = \frac{1}{LC} i^2 > 0 \;\; \forall x$$

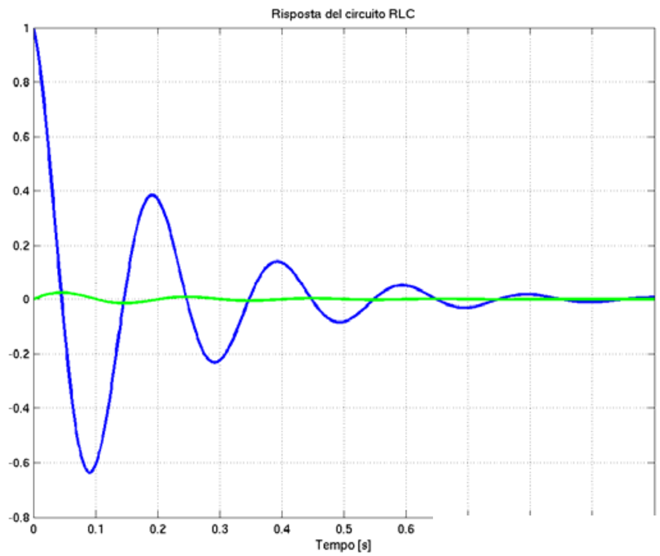
L'integrale $\int_0^x g(\rho)\, d\rho$ è radialmente illimitato

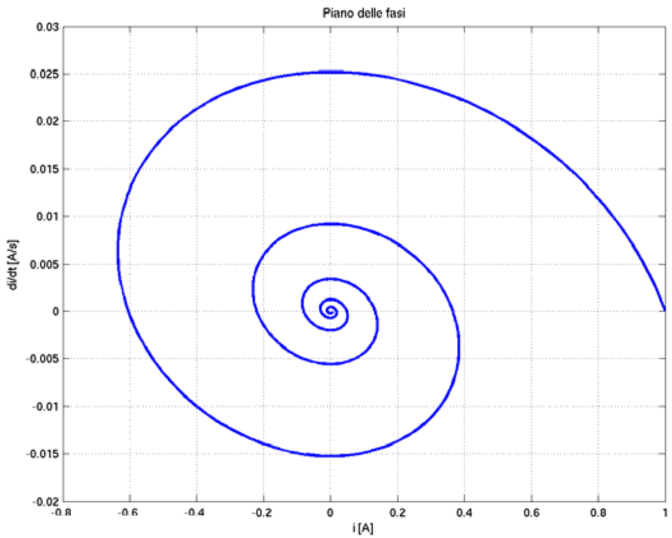
$$\lim_{i\to\infty} \int_0^i \frac{1}{LC}\, \rho\, d\rho = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{LC}\frac{i^2}{2} \rightarrow \infty$$

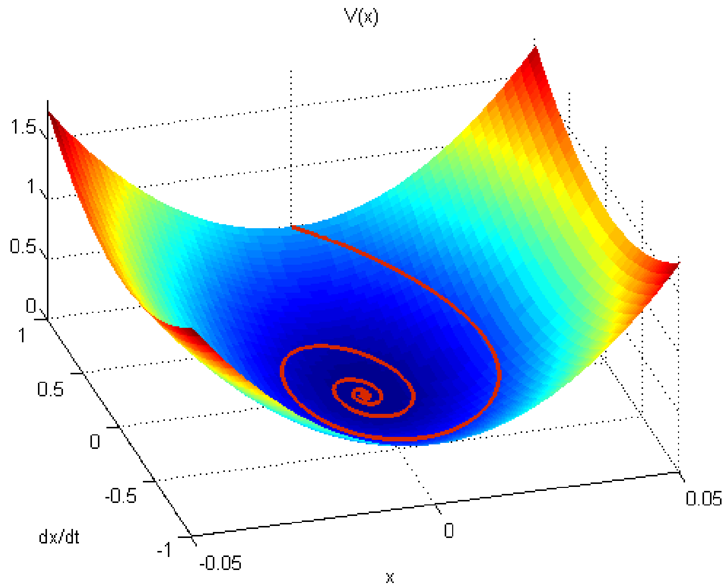
$\rightarrow$ **Il sistema è globalmente asintoticamente stabile**.

La funzione di Lyapunov si può considerare la somma dell'energia cinetica e potenziale, il fatto che essa sia non crescente è indice della dissipatività del sistema.

- **Sistemi del secondo ordine: risposta**



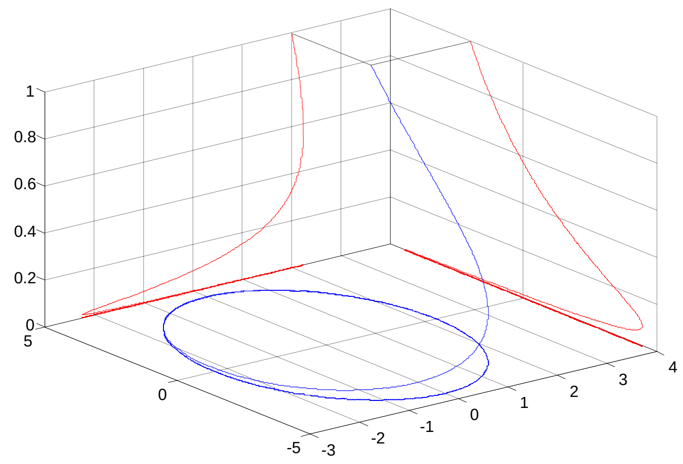




Cicli limite e insiemi invarianti

Nei sistemi non lineari si possono avere:

1. *punti di equilibrio*
   - stabili
   - instabili
2. *cicli limite*
   - stabili
   - instabili



Introduciamo il concetto di <u>insieme limite</u>:

- Un insieme limite positivo S^+ è un insieme a cui le traiettorie sufficientemente vicine tendono per $t \to \infty$.

- Un insieme limite negativo S^- è un insieme cui le traiettorie sufficientemente vicine tendono, sostituendo t con $-\tau$, per $\tau \to \infty$.

Un <u>invariante</u> J è un insieme definito sullo spazio degli stati caratterizzato dalla proprietà che per ogni stato iniziale appartenente a J, l'intera traiettoria appartiene a J sia per t positivi che negativi.

Cicli limite e insiemi invarianti

Ci si riferisce al sistema non lineare autonomo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , \quad f(0) = 0$$

e si suppone che esso ammetta una funzione definita positiva V_1 tale che nel dominio $D_1=\{\, x\colon V_1(x) < h_1\}$ (che si suppone limitato) sia :

$$\dot{V}_1(x) > 0 \quad \forall x \in D_1 \quad , \quad x \neq 0$$

e una funzione definita positiva V_2 tale che nel dominio $D_2=\{\, x\colon h_2 < V_2(x) < h_3\}$ sia:

$$\dot{V}_2(x) < 0 \quad \forall x \in D_2$$

D_2 può essere illimitato, nel qual caso la h_3 non compare.
Si può dimostrare che il dominio chiuso

$$D_3 = \{x : \; V_1(x) \geq h_1, V_2(x) \leq h_2\}$$

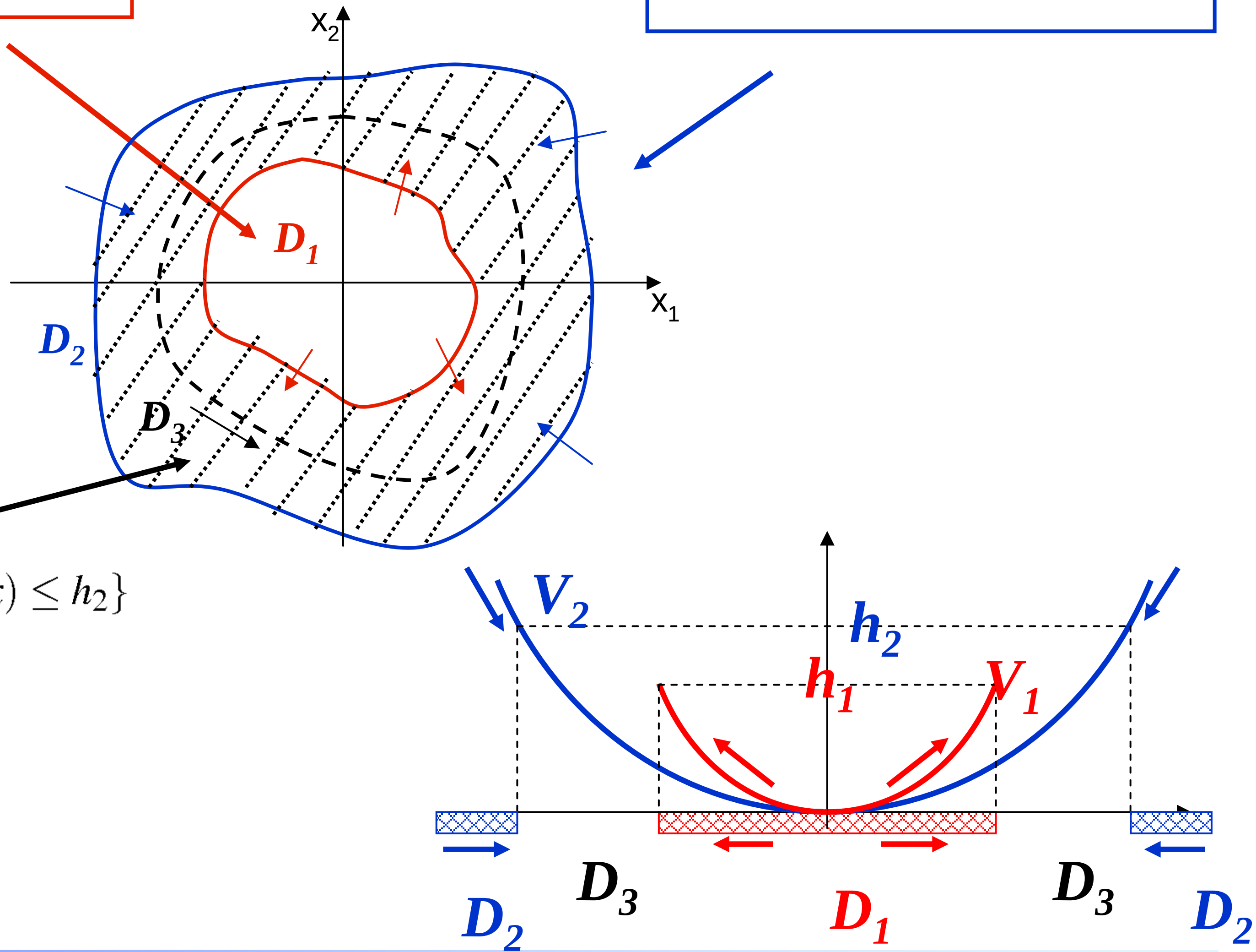
contiene un insieme limite positivo.

$D_1=\{ x: V_1(x) < h_1\}$

$\dot{V}_1(x) > 0 \quad \forall x \in D_1 \ , \ x \neq 0$

$D_2=\{ x: h_2< V_2(x) < h_3\}$

$\dot{V}_2(x) < 0 \quad \forall x \in D_2$



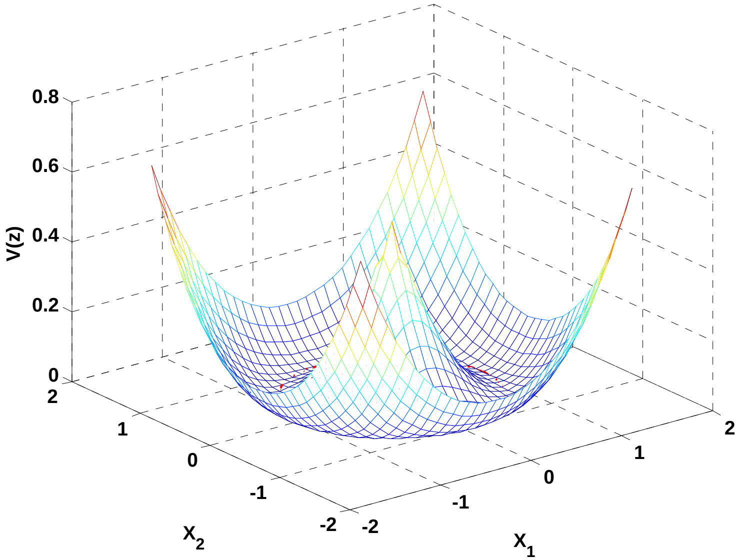
$D_3 = \{x: \ V_1(x) \geq h_1, V_2(x) \leq h_2\}$

Cicli limite

Dato il sistema

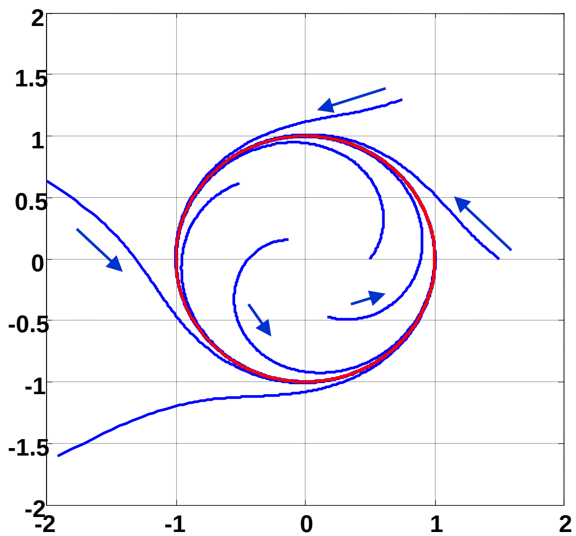
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - r^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - r^2) \end{cases} \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

E` semplice verificare l'esistenza di un ciclo limite per *r = 1* e che tale ciclo limite è globalmente stabile per il sistema, cioè per qualsiasi condizione iniziale le traiettorie tendono a questo ciclo limite.



$$V(r) = \frac{(1-r)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(r) &= -(1-r)\dot{r} \\ &= -(1-r)^2(1+r)r \end{aligned}$$



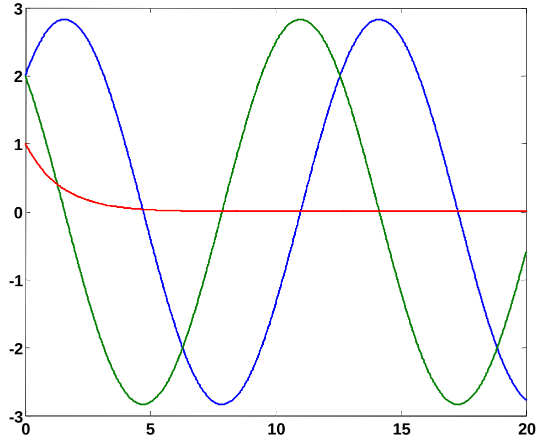
Il ciclo limite *r = 1* è asintoticamente stabile

N.B.: *r > 0* sempre

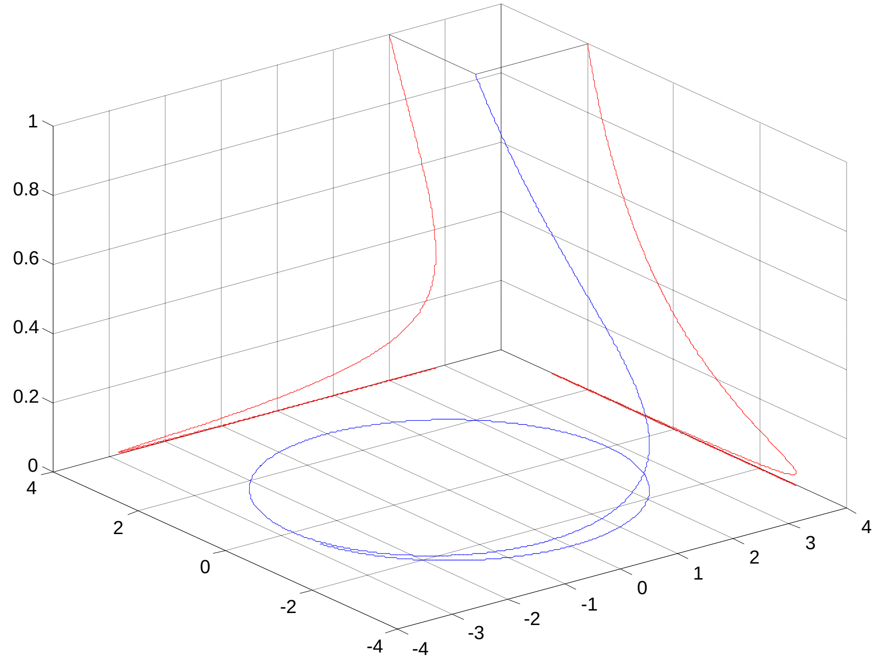
Cicli limite

- Comportamento del sistema descritto dalla matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$



Nello spazio degli stati il sistema ha una evoluzione, con condizioni iniziali non nulle, del tipo rappresentato in figura



$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \cos(0.5t) & \sin(0.5t) & 0 \\ -\sin(0.5t) & \cos(0.5t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.7t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(\cos(0.5t) + \sin(0.5t)) \\ 2(\cos(0.5t) - \sin(0.5t)) \\ e^{-0.7t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sistemi lineari non stazionari

Si consideri il sistema non stazionario omogeneo:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \qquad (1)$$

Come già visto, questo sistema è stabile secondo Lyapunov se per ogni t_0 e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che:

$$\|x(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0$$

e asintoticamente stabile secondo Lyapunov se inoltre

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

Sistemi lineari non stazionari

Valgono i seguenti teoremi, che esprimono la stabilità del sistema (1) in termini della matrice di transizione $\phi(t,t_0)$.

Teorema: *Il sistema (1) è stabile secondo Lyapunov se e solo se per ogni t_0 esiste un numero reale M tale che:*

$$\|\phi(t,t_0)\| \leq M < \infty \quad \forall\, t \geq t_0$$

asintoticamente stabile secondo Lyapunov se inoltre:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|\phi(t,t_0)\| = 0$$

Sistemi lineari non stazionari

Si consideri il seguente sistema lineare non stazionario:

$$\dot{x}(t) = A(t)\; x(t) + B(t)\; u(t) \qquad (3)$$

$$y(t) = C(t)\; x(t) + D(t)\; u(t) \qquad (4)$$

Questo sistema è stabile <u>ingresso limitato – stato limitato</u> se per ogni t_0 e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che $||u(t)|| < \eta$, $t \geq t_0 \Rightarrow$

$$\|x(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)\; B(\tau)\; u(\tau)\; d\tau \right\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0$$

Teorema: Il sistema (3) è stabile <u>ingresso limitato – stato limitato</u> se e solo se:

$$\int_{t_0}^{t} \left\| V(t,\tau) \right\| d\tau = \int_{t_0}^{t} \left\| \phi(t,\tau)\; B(\tau) \right\| d\tau \leq M < \infty \quad \forall\, t \geq t_0$$

Sistemi lineari non stazionari

Analogamente il sistema (3) si dice stabile <u>ingresso limitato – uscita limitata</u> se per ogni t_0 e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che $||u(t)|| < \eta, \quad t \geq t_0 \Rightarrow$

$$\|y(t)\| = \left\| C(t) \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)\, B(\tau)\, u(t)\, d\tau + D\, u(t) \right\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0$$

Teorema: Il sistema (3) è stabile <u>ingresso limitato – uscita limitato</u> se e solo se:

$$\int_{t_0}^{t} \left\| W(t,\tau) \right\| d\tau = \int_{t_0}^{t} \left\| C(t)\, \phi(t,\tau)\, B(\tau) \right\| d\tau \leq M < \infty \quad \forall\, t \geq t_0$$

Sistemi lineari stazionari

Si consideri il seguente sistema lineare stazionario:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \qquad (1)$$

Se si assume $V(x) = x^T P\, x$, si hanno le relazioni:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T(t)\,P\,x(t) + x^T(t)\,P\,\dot{x}(t) =$$

$$= x^T(t)\,A^T P\,x(t) + x^T(t)\,P\,A\,x(t) = -x^T(t)\,M\,x(t)$$

avendo posto:

$$A^T P + P\,A = -M \qquad (2)$$

Se la matrice *M* è definita positiva, il sistema (1) è globalmente asintoticamente stabile. Si può dimostrare che:

Teorema: L'equazione matriciale di Lyapunov (2) ammette un'unica soluzione P simmetrica definita positiva per ogni M simmetrica definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono a parte reale negativa.

Sistemi lineari stazionari tempo discreti

Si consideri il seguente sistema lineare stazionario:

$$x(k+1) = A\, x(k) \qquad (3)$$

Se si assume $V(x) = x^T P\, x$, si hanno le relazioni:

$$\Delta V(x(k)) = x^T(k+1)\, P\, x(k+1) - x^T(k)\, P\, x(k) =$$

$$= x^T(k)\, A^T P\, A\, x(k) - x^T(k)\, P\, x(k) = -x^T(k)\, M\, x(k)$$

avendo posto:

$$A^T P\, A - P = -M \qquad (4)$$

Se la matrice M è definita positiva, il sistema (3) è globalmente asintoticamente stabile. Si può dimostrare che:

Teorema: *L'equazione matriciale di Lyapunov (4) ammette un'unica soluzione P simmetrica definita positiva per ogni M simmetrica definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono interni al cerchio di raggio unitario.*

CONTROLLI AUTOMATICI LS

FINE

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri