**CONTROLLI AUTOMATICI LS**
**Ingegneria Informatica**

# Proprietà strutturali: Controllabilità e Osservabilità

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@deis.unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

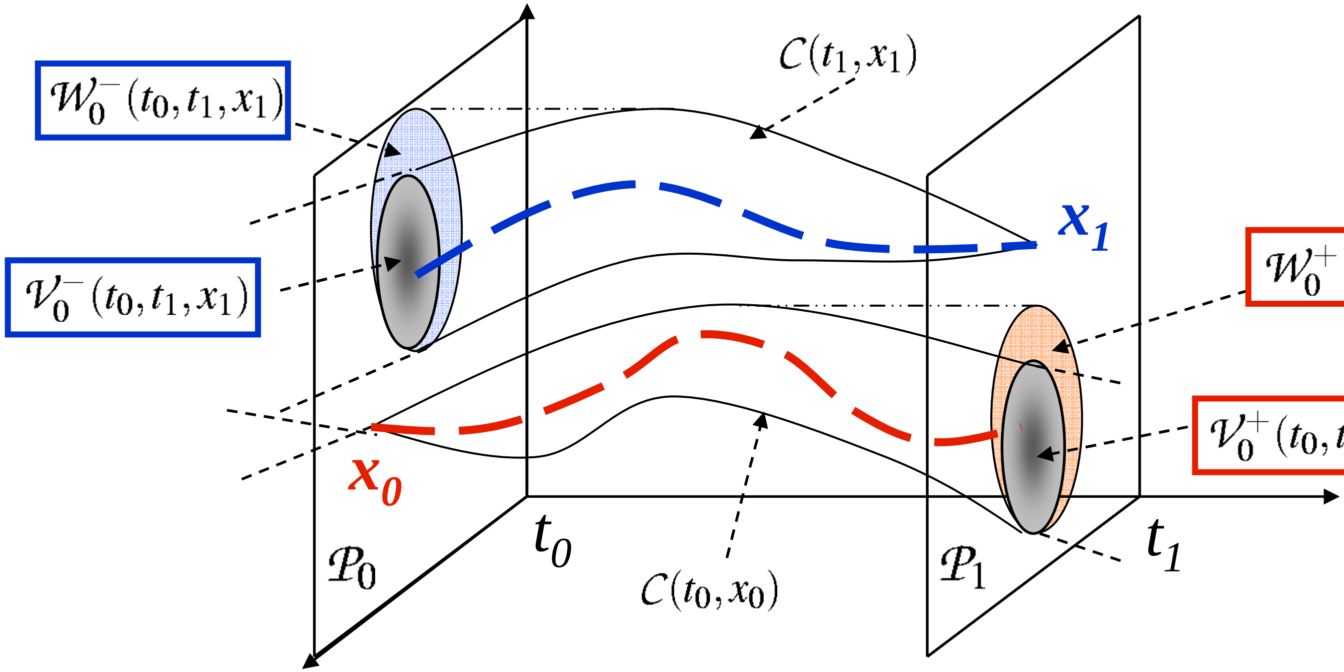
## Controllabilità e Raggiungibilità

*Insieme degli stati raggiungibili all'istante* $t_1$ *a partire dallo stato* $x_0$ *all'istante* $t_0$

$$\mathcal{V}_0^+(t_0, t_1, x_0) \; = \; \{x_1 : x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)),\; u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

*Insieme degli stati controllabili allo stato* $x_1$ *all'istante* $t_1$ *a partire dall'istante* $t_0$

$$\mathcal{V}_0^-(t_0, t_1, x_1) \; = \; \{x_0 : x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)),\; u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$



# Controllabilità e Raggiungibilità

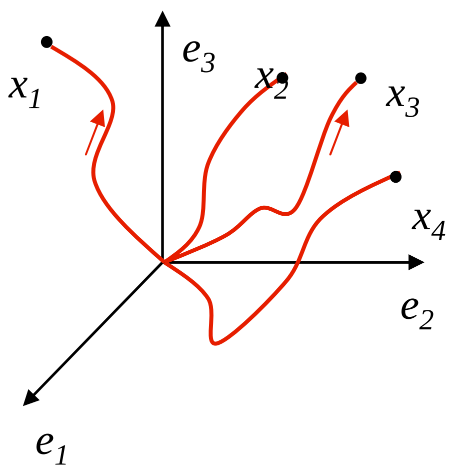


Il sistema MIMO lineare stazionario (tempo continuo o tempo discreto):

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) & = & C\,x(t) + D\,u(t) \end{array} \qquad \left( \begin{array}{rcl} x(k+1) & = & A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = & C\,x(k) + D\,u(k) \end{array} \right)$$

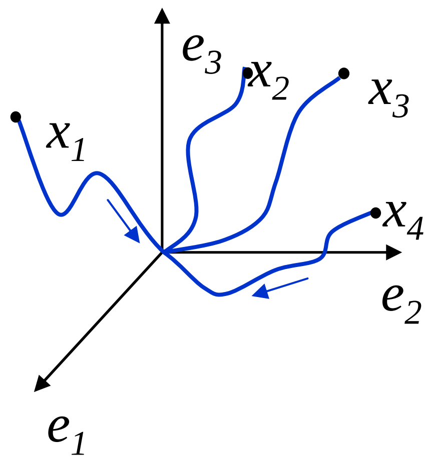
è detto *completamente raggiungibile* se, a partire dall'origine, qualunque stato può essere raggiunto in tempo finito applicando una opportuna azione di controllo

$$\mathcal{V}_0^+(t_0, t_1, x_0) = \mathbb{R}^n$$




è detto *completamente controllabile* se, a partire da uno stato qualunque, l'origine può essere raggiunta in tempo finito applicando una opportuna azione di controllo

$$\mathcal{V}_0^-(t_0, t_1, x_0) = \mathbb{R}^n$$



- Se consideriamo per esempio un sistema tempo discreto

$$x(k+1) \;=\; A\,x(k) + B\,u(k), \qquad x(0) = 0$$

allora:

$$\begin{aligned}
x(1) &= B\,u(0)\\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)\\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)\\
&\dots\\
x(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{k-1}B] \begin{bmatrix} u(k-1)\\ u(k-2)\\ \vdots\\ u(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Stato raggiungibile in *k* passi dallo stato "0"

- Al variare di *u(0), u(1), … u(k-1)* si ottiene l'insieme di tutti gli stati raggiungibili in *k* passi

$$\mathcal{V}_k^+(0) \;= im\{P_1(k)\}$$

$$P_1(k) = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \; A^{k-1}B]$$

Stati raggiungibili:
sono un sottospazio di $R^n$

# Controllabilità e Raggiungibilità

- Esempio:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$im\{P_1(k)\} = im\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{k-1} \end{bmatrix}\} = span\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

- Se fosse stato

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{V}_2^+\{0\} = im\{\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2$$

- Vale: $\mathcal{V}_1^+\{0\} \subseteq \mathcal{V}_2^+\{0\} \subseteq \dots \mathcal{V}_n^+\{0\} = \mathcal{V}_{n+1}^+\{0\}$

$\longrightarrow$ *Se uno stato è raggiungibile, lo è al più in n passi.*

# Controllabilità e Raggiungibilità



- Se consideriamo ancora il sistema tempo discreto

$$x(k+1) \;=\; A\,x(k)+B\,u(k)$$

Uno stato *x(0)* è *controllabile* a "0" in *k* passi se:

$$x(k)=0 \;=\; A^k x(0)+\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) \quad \rightarrow \quad -A^k x(0)=\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)$$

Il sistema è controllabile in *k* passi se lo stato $-A^k\, x(0)$ è raggiungibile in *k* passi dallo stato 0

$$A^k x \subseteq im\{[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \; A^{k-1}B]\} \;=\; \mathcal{V}_k^+(0)$$

$$im\{A^k\} \subseteq im\{[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \; A^{k-1}B]\} \;=\; \mathcal{V}_k^+(0)$$

- Spazio controllabile in *k* passi

$$\mathcal{V}_k^- = \{x \;:\; A^k x \in \mathcal{V}_k^+\} \quad \longrightarrow$$

Stati controllabili:
sono un sottospazio di $R^n$

- Dato il sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) + D\,u(k) \end{aligned}$$

**Teorema:** posto $P_1 = [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$
l'insieme degli *stati raggiungibili* $V^+$ in qualunque intervallo in tempo finito è

$$\mathcal{V}^+ = \mathcal{R} = im\{P_1\}$$

l'insieme degli *stati controllabili* $V^-$ in qualunque intervallo in *tempo* finito è

$$\mathcal{V}^- = A^{-n} im\{P_1\}$$

$$\longrightarrow \quad im\{A^n\} \subseteq im\{P_1\}$$

Il sistema è completamente raggiungibile se e solo se $im\{P_1\} = R^n$, cioè se $P_1$ ha rango massimo.

La raggiungibilità implica la controllabilità (se $im\{P_1\} = R^n$, allora contiene $im\{A^n\}$).
La controllabilità **NON** implica la raggiungibilità (se $dim[im\{A^n\})] < n$ ).
Sono equivalenti sse A ha rango pieno.

# Controllabilità e Raggiungibilità



- Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}$$

**Teorema:** posto $P_1 = [B \;\; AB \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B]$
l'insieme degli *stati raggiungibili* $V^+$ in qualunque intervallo in tempo finito è

$$\mathcal{V}^+ = \mathcal{R} = im\{P_1\}$$

l'insieme degli *stati controllabili* $V^-$ in qualunque intervallo in tempo finito è

$$\mathcal{V}^- = \mathcal{R} = im\{P_1\}$$

Pertanto il sistema è completamente controllabile e raggiungibile se e solo se

$$im\{P_1\} = \mathbb{R}^n$$

cioè se $P_1$ ha rango massimo.

$\mathcal{R}$ è il minimo invariante in A contenente $im\,\{B\}$

La matrice $P_1$ è detta *matrice di raggiungibilità*

# Controllabilità e Raggiungibilità



Si può dimostrare che il sottospazio degli stati controllabili all'origine in qualunque intervallo di tempo finito:

- per sistemi tempo continui coincide con $R$ (controllabilità = raggiungibilità)
- per sistemi a tempo discreto in generale contiene $R_d$ e coincide con esso se $A_d$ non è singolare.

- *Esempio:*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad [B,\ AB,\ A^2B] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

***Sistema non completamente controllabile; sottospazio di controllabilità definito da $x = [1, 0, 0]^T$***

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad [B,\ AB,\ A^2B] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

***Sistema completamente controllabile***

# Controllabilità e Raggiungibilità - Esempio

- Dato un sistema tempo discreto, determinare la successione di ingresso *u(0), u(1), …, u(k-1)* che consenta di far passare lo stato da *x(0)* a *x(k).*

- CNS perché il problema abbia soluzione è che

$$x(k) - A^k x(0) \in im\{[B \;\; AB \;\; \ldots \;\; A^{k-1}B]\} = \mathcal{V}_k^+$$

cioè che lo stato $x(k)- A^k\, x\,(0)$ sia raggiungibile in $k$ passi. Se è così, allora la soluzione è data da:

$$x(k) - A^k x(0) = [B \;\; AB \;\; \ldots \;\; A^{k-1}B] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

nelle incognite:

$$\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ \ldots \\ u_m(k-1) \\ \ldots \\ u_1(0) \\ \ldots \\ u_m(0) \end{bmatrix}$$

Soluzione non unica in generale:

$$\longrightarrow \quad u = \bar{u} + v, \qquad v : P_1 v = 0$$

$$\bar{u} = P_1^+ (x(k) - A^k x(0))$$

Soluzione a norma minima

# Controllabilità e Raggiungibilità - Esempio

- Si è visto che vi possono essere più soluzioni, e che quindi è possibile scegliere tra le stesse una “ottima” (secondo opportuni criteri).

  Ad esempio, la soluzione di norma minima rende minima l’energia di controllo necessaria per ottenere la transizione desiderata

$$\bar{u} = P_1^{+}(x(k) - A^k x(0))$$

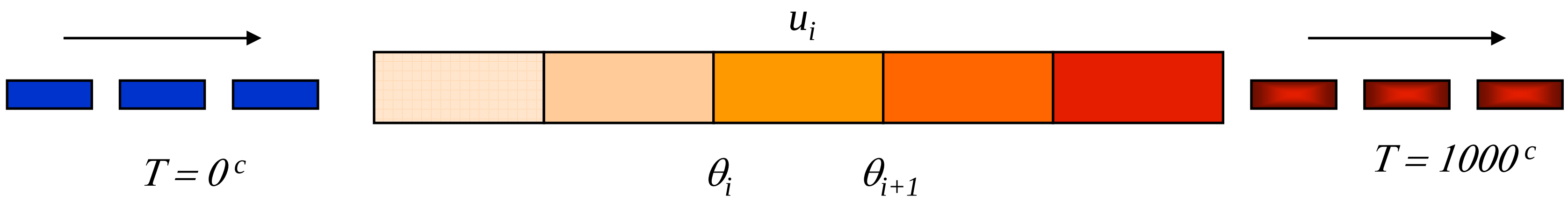
$$u = \bar{u} + v, \qquad v : P_1 v = 0$$

  Questa soluzione (basata sulla inversione della matrice $P_1$) non è utilizzata di frequente nella pratica in quanto richiede una *perfetta conoscenza* dei parametri del modello (matrici A e B) e *l’assenza di disturbi.*

# Controllabilità e Raggiungibilità - Esempio



- *Esempio:* si devono riscaldare a 1000$^c$ delle barrette di acciaio facendole passare in un forno a cinque stadi con temperatura crescente. Il costo del riscaldamento di ciascun stadio è proporzionale al quadrato della temperatura dello stadio stesso. Determinare le temperature in modo da minimizzare il costo $C = (\Sigma_i\, u_i^2)^{1/2}$.




- Siano $\theta_i$ e $\theta_{i+1}$ $i = 1, \ldots, 5$ le temperature di ingresso ed uscita delle barrette nei vari stadi, e sia $u_i$ la temperatura dello stadio i-esimo.
- La dinamica del processo di riscaldamento nel generico stadio si può descrivere come:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{u_i - \theta_i}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_{i+1} = \frac{1}{2}\theta_i + \frac{1}{2}u_i, \qquad A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}$$

- La matrice di raggiungibilità in 5 passi del sistema è:

$$P_1(5) = R_5 = \left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}\right]$$

- Se la temperatura iniziale delle barrette è 0[c] , allora

$$1000 = R_5\, u = \left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}\right] \begin{bmatrix} u(4) \\ u(3) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

- In questo caso la matrice $R_5$ non è invertibile e si deve ricorrere alla sua pseudoinversa (destra, in quanto $R_5$ è "rettangolare bassa")

$$u = R_5^+ 1000 = R_5^T (R_5 R_5^T)^{-1} 1000 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} \cdot 3.0029 \cdot 1000 = \begin{bmatrix} 1501.5 \\ 750.7 \\ 375.4 \\ 187.7 \\ 93.8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \theta = [0,\ 46.9,\ 117.3,\ 246,3,\ 498.5,\ 1000]$$

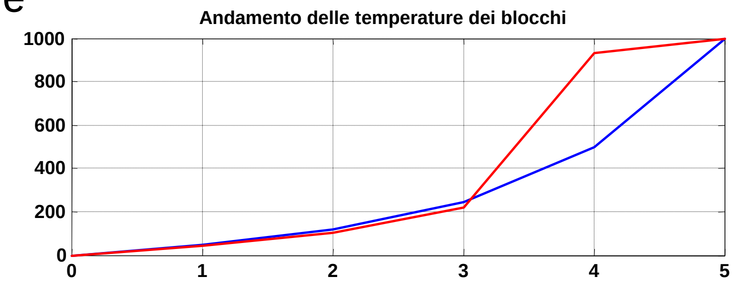
- Siccome $R_5$ è rettangolare bassa, di dimensioni *1 x 5*, ha uno spazio nullo di dimensione 4 definito da:

$$N = \begin{bmatrix} -0.4332 & -0.2166 & -0.1083 & -0.0542 \\ 0.8994 & -0.0503 & -0.0251 & -0.0126 \\ -0.0503 & 0.9749 & -0.0126 & -0.0063 \\ -0.0251 & -0.0126 & 0.9937 & -0.0031 \\ -0.0126 & -0.0063 & -0.0031 & 0.9984 \end{bmatrix}$$

$$0 = R_5\, v = R_5\, (N\, y), \quad \forall y$$

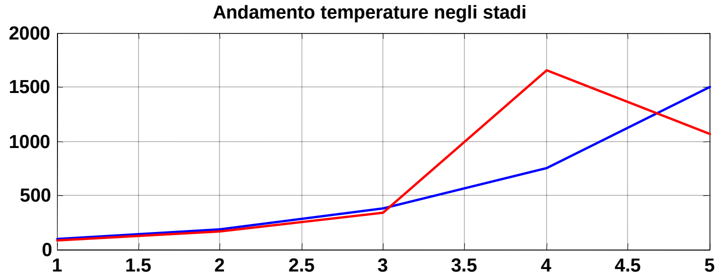
Quindi, se per esempio $y = [1000, 10, 1, 1]^T$, si ottiene

$$u_1 = u + v = \begin{bmatrix} 1065.9 \\ 1649.6 \\ 334.8 \\ 163.4 \\ 82.2 \end{bmatrix}$$



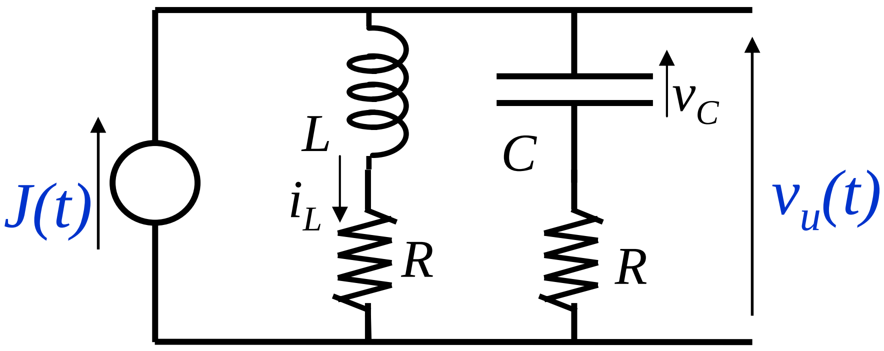

**Stesso valore finale**

$$\theta_1 = [0,\ 41.1,\ 102.3,\ 218.5,\ 934.1,\ 1000]$$




con un aumento del "costo" da $C = 1732.9$ a $C_1 = 2000.8$

- Dato il seguente circuito elettrico:




$$
\begin{aligned}
L\frac{di_L}{dt} &= v_C + R(J - i_L) - Ri_L \\
C\frac{dv_C}{dt} &= J - i_L \\
v_u &= v_C + R(J - i_L)
\end{aligned}
$$

- Si ottiene

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} J \\
v_u &= \begin{bmatrix} -R & 1 \end{bmatrix} x + [R] J
\end{aligned}
$$

$$
P_1 = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{LC} - \frac{2R^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix}
$$

$$
det(P_1) = \frac{1}{LC}\left[\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}\right]
$$

Il sistema non è completamente controllabile se $det(P_1) = 0$, cioè se $R\,C = L/R$ (costanti di tempo uguali)

# Osservabilità

- Un sistema si dice *completamente osservabile* se dalla conoscenza delle funzioni di ingresso e di uscita $u|_{[0,\, t_1]}$, $y|_{[0,\, t_1]}$ in un qualunque intervallo di tempo finito si può dedurre lo stato x(0)

- **Teorema:** posto

$$P_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

L'insieme degli *stati inosservabili* in qualsiasi intervallo di tempo finito è

$$Q = ker\{P_2\}$$

Il sistema è completamente osservabile se e solo se $Ker\{P_2\} = 0$ cioè se $P_2$ ha rango massimo. $Q$ è un sottospazio di $\mathcal{R}^n$

La matrice $P_2$ è detta *matrice di osservabilità*

- *Esempio:*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad C = [0, 1, 0] \qquad \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

***Sistema non completamente osservabile: stati definiti da Ker{$P_2$} = [-1, 0, 1]$^T$***

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad C = [0, 1, 1] \qquad \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix},$$

***Sistema completamente osservabile (Ker{$P_2$} = {0})***

# Osservabilità



- Dato

$$P_2^T = [C^T \;\; A^T C^T \;\; \dots \;\; (A^T)^{n-1} C^T]$$

$Q = ker\{P_2\}$ è il massimo invariante in $A$ contenuto in $ker\{C\}$: qualunque stato iniziale su $Q$ dà luogo a moti liberi che non influenzano l'uscita $y$.

- Si ricorda che data una matrice $P$ generica,

$$ker\, P = (im\, P^T)^{\perp}, \qquad im\, P = (ker\, P^T)^{\perp}$$

Cioè il nucleo di una qualunque matrice P è uguale al complemento ortogonale dell'immagine di $P^T$

# Sistemi equivalenti



- Due sistemi $\Sigma$ *(A, B, C, D)* e $\Sigma$' *(A', B', C', D')* si dicono equivalenti se esiste una matrice *T non singolare* tale che *x = T x'* e

$$A' = T^{-1}AT \qquad B' = T^{-1}B$$

$$C' = CT \qquad D' = D$$

- Per quanto riguarda la raggiungibilità, si ha che:

$$P_1' = T^{-1}P_1 \qquad\qquad (P_1 = TP_1')$$

- Se i due sistemi sono raggiungibili, allora

$$T = P_1(P_1')^{+}$$

e, nel caso di un solo ingresso

$$T = P_1(P_1')^{-1}$$

# Sistemi equivalenti



- *Esempio:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$P_1' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = P_1 (P_1')^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Verifica: $$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

# Sistema duale



- Dato un sistema dinamico lineare stazionario $\Sigma$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Si definisce *sistema duale* il sistema $\Sigma_D$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A^T z(t) + C^T v(t) \\ \rho(t) &= B^T z(t) + D^T v(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

Numero di ingressi di $\Sigma$ = Numero di uscite di $\Sigma_D$

Numero di uscite di $\Sigma$ = Numero di ingressi di $\Sigma_D$

# Sistema duale

*Proprietà dei sistemi duali:*

| | | |
|---|---|---|
| $\Sigma$ stabile | $\Leftrightarrow$ | $\Sigma_D$ stabile |
| $\Sigma$ completamente controllabile | $\Leftrightarrow$ | $\Sigma_D$ completamente ricostruibile |
| $\Sigma$ completamente ricostruibile | $\Leftrightarrow$ | $\Sigma_D$ completamente controllabile |
| $\Sigma$ completamente osservabile | $\Leftrightarrow$ | $\Sigma_D$ completamente raggiungibile |
| $\Sigma$ completamente raggiungibile | $\Leftrightarrow$ | $\Sigma_D$ completamente osservabile |

Derivano dal fatto che:

$$\lambda_i\{A\} = \lambda_i\{A^T\}, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} P_{1,D}^T &= P_2 \\ P_{2,D}^T &= P_1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} P_1^T &= P_{2,D} \\ P_2^T &= P_{1,D} \end{aligned}$$

# Forma standard di raggiungibilità



- Si consideri il sistema MIMO lineare stazionario (tempo continuo o tempo discreto):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned} \qquad \left( \begin{aligned} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) + D\,u(k) \end{aligned} \right)$$

con *rank*$(P_1) = \rho < n$ (*dim* $\mathcal{R} = \rho < n$) e quindi non completamente raggiungibile. Si consideri la matrice di trasformazione

$$T = [T_1 \quad T_2]$$

dove $T_1$, di dimensioni $n \times \rho$, è una *matrice di base di* $V^+$ e $T_2$ di dimensioni $n \times (n-\rho)$ è scelta in modo che $T$ sia non singolare. Si ottiene la forma semplificata:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = CT = [C_1 \quad C_2] \qquad D' = D$$

$$dim\{A_{11}\} = \rho \times \rho, \qquad dim\{B_1\} = \rho \times m$$

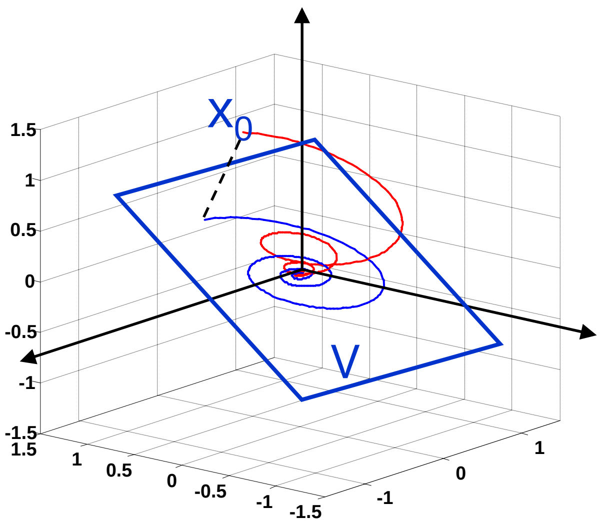
*Forma standard di raggiungibilità*, in quanto si mette in evidenza la parte raggiungibile del sistema ($A_{11}$, $B_1$, $C_1$).

- N.B. tramite l'ingresso si può agire solo sulle prime $\rho$ componenti del nuovo stato $z = T x$. Se le altre $n - \rho$ non sono stabili, non si può agire in alcun modo.

  Si consideri il sistema omogeno $\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$

  Una traiettoria che si origina su un invariante si svolge completamente su di esso. Se la matrice $A_{11}$ è stabile essa tende all'origine. Una traiettoria che si origina fuori *dall'invariante* tende all'invariante se la matrice $A_{22}$ è stabile.

  - Se $A_{11}$ è stabile, l'invariante si dice *internamente stabile*
  - Se $A_{22}$ è stabile, l'invariante si dice *esternamente stabile*




$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

# Forma standard di osservabilità



- Si consideri il sistema MIMO lineare stazionario (tempo continuo o tempo discreto):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) + D\,u(k) \end{aligned}\right)$$

con *rank*($P_2$) = $\rho > 0$, ($\rho < n$, *dim* $Q = n - \rho > 0$) e quindi *non completamente osservabile*.

Esiste una matrice di trasformazione $M$ tale che

$$A' = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B' = M^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C' = CM = [C_1 \quad 0] \qquad D' = D$$

$$dim\{A_{11}\} = \rho \times \rho, \qquad dim\{C_1\} = p \times \rho$$

*Forma standard di osservabilità*, in quanto si mette in evidenza la parte osservabile del sistema ($A_{11}$, $B_1$, $C_1$).

Dalle proprietà dei sistemi duali si ottiene $\boxed{M = (T^{-1})^T = (T^T)^{-1}}$

essendo $T$ la matrice che pone il sistema duale in forma di raggiungibilità.

# Scomposizione canonica di Kalman



- Si consideri il sistema $S = (A, B, C, D)$. Sia $R$ il sottospazio raggiungibile e $Q$ il sottospazio non osservabile.

  Si consideri la trasformazione dello stato definita dalla matrice

$$T = [T_1 \;\; T_2 \;\; T_3 \;\; T_4]$$

- Dove:

$$\begin{aligned} im\{T_1\} &= \mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \\ im\{[T_1, \;\; T_2]\} &= \mathcal{R} \\ im\{[T_1, \;\; T_3]\} &= \mathcal{Q} \\ T_4 &: \; T \;\; \text{non singolare} \end{aligned}$$

*Base dello spazio ragg. e non osserv.*

*Base dello spazio raggiungibile*

*Base dello spazio non osservabile*

- Si ottiene il sistema $S' = (A', B', C', D')$ dove

$$A' = T^{-1}AT \qquad B' = T^{-1}B$$

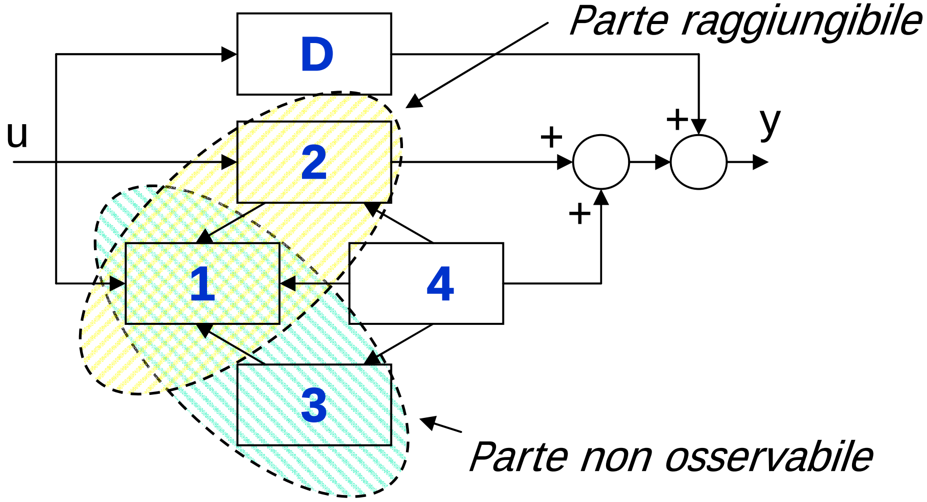
$$C' = CT \qquad D' = D$$

# Scomposizione canonica di Kalman

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{14} \\ 0 & A'_{22} & 0 & A'_{24} \\ 0 & 0 & A'_{33} & A'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A'_{44} \end{bmatrix} \qquad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = CT = [0 \;\; C'_2 \;\; 0 \;\; C'_4] \qquad D' = D$$

- $S_2 = (A'_{22}, B'_2, C'_2)$ raggiungibile ed osservabile
- $S_1 = (A'_{11}, B'_1, 0)$ raggiungibile e non osservabile
- $S_4 = (A'_{44}, 0, C'_4)$ non raggiungibile e osservabile
- $S_3 = (A'_{33}, 0, 0)$ non raggiungibile e non osservabile



# Dallo spazio degli stati alla funzione di trasferimento



- Dato il sistema SISO lineare stazionario

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + b\,u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= c\,x(t) + d\,u(t) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} s\,x(s) &= A\,x(s) + b\,u(s) + x_0 \\ y(s) &= c\,x(s) + d\,u(s) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} x(s) &= (s\,I - A)^{-1}(b\,u(s) + x_0) \\ y(s) &= c\,(s\,I - A)^{-1} b\,u(s) + c\,(s\,I - A)^{-1} x_0 + d\,u(s) \end{aligned}$$

- Da cui si possono identificare:

  - *la funzione di trasferimento ingresso-uscita* $\quad G(s) = c\,(s\,I - A)^{-1} b$

  - *la trasformata della risposta libera* $\quad c\,(s\,I - A)^{-1} x_0$

# Dallo spazio degli stati alla matrice di trasferimento

- Considerazioni analoghe valgono per il caso di sistemi MIMO

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}$$

In modo analogo al caso SISO si ottiene

$$\begin{aligned} x(s) &= (s\,I - A)^{-1}(B\,u(s) + x_0) \\ y(s) &= C\,(s\,I - A)^{-1} B\,u(s) + C\,(s\,I - A)^{-1} x_0 + D\,u(s) \end{aligned}$$

Dove la matrice

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1} B + D$$

viene detta *matrice di trasferimento del sistema.*

*Si può verificare abbastanza facilmente che la matrice di trasferimento dipende solo dalla parte raggiungibile ed osservabile del sistema.*

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1} B + D = C_2\,(s\,I - A_{22})^{-1} B_2 + D$$

**CONTROLLI AUTOMATICI LS**

# Proprietà strutturali: Controllabilità e Osservabilità

# FINE

Prof. Claudio Melchiorri

DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093034

e-mail: claudio.melchiorri@deis.unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri