CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Controllo con retroazione dello stato

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

Controllo con retroazione dello stato

- *Legge di controllo*
  - *In catena aperta:* legge di controllo predeterminata in funzione delle condizioni iniziali e finali dello stato e del modello del sistema
  - *In retroazione:* legge di controllo che tiene in conto, istante per istante, dell'andamento dello stato del sistema

- *Controllo in retoazione*
  - *Retroazione dinamica*: azione di controllo calcolata sulla base dello stato da un dispositivo avente dinamica propria
  - *Retroazione statica:* azione di controllo calcolata sulla base dello stato mediante una relazione algebrica

- *Obiettivi del controllo*
  - *Problemi di regolazione:* si vuole (ri)portare lo stato del sistema a "0" (effetto di disturbi o errori) con velocità assegnata
  - *Problemi di asservimento (tracking):* si vuole che l'uscita del sistema approssimi, secondo certi criteri, un andamento desiderato

- Caso sviluppato nel seguito: retroazione statica per problemi di regolazione

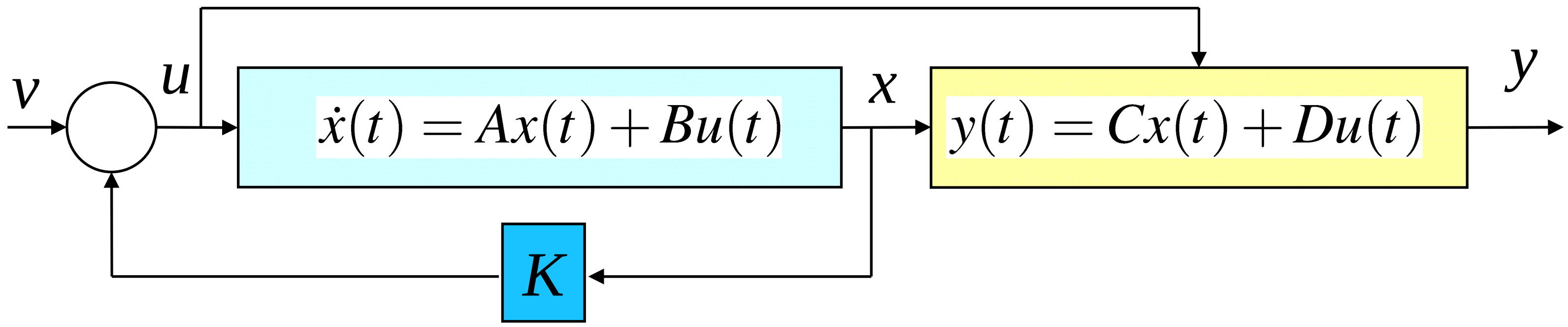
Controllo con retroazione dello stato

- Si consideri il sistema lineare stazionario (tempo continuo o tempo discreto) e si supponga che *tutte le componenti del vettore di stato siano direttamente accessibili*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) + D\,u(k) \end{aligned} \right)$$

- Si consideri la legge di controllo

$$u(t) = Kx(t) + v(t), \qquad K: \quad m \times n$$



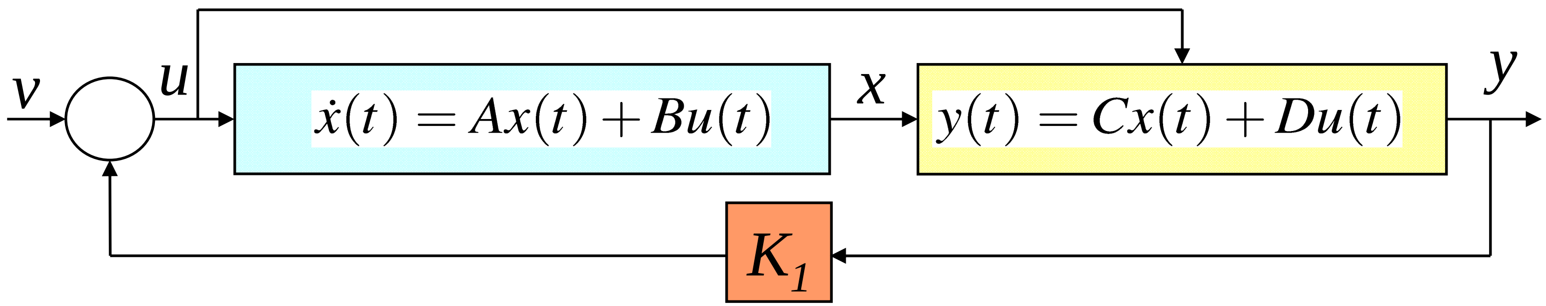
Controllo con retroazione dello stato

- Applicando la legge di controllo si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + BK)\, x(t) + B\, v(t) \\ y(t) &= (C + DK)\, x(t) + D\, v(t)\end{aligned}$$

- N.B. una possibilità alternativa di controllo è quella che si ottiene effettuando una retroazione dall'uscita *y(t)* anziché dallo stato *x(t).*

$$u(t) = K_1 y(t) + v(t)$$



- Per sistemi ad un ingresso ed una uscita ($m = p = 1$), K_1 è uno scalare, mentre K (retr. dello stato) è un vettore di n componenti.
- Vi sono quindi più gradi di libertà nella definizione della legge di controllo e quindi in generale sarà possibile ottenere prestazioni migliori (maggiori possibilità di modifiche della dinamica del sistema)

Proprietà di invarianza con retroazione dello stato

- Se S_k è il sistema ottenuto da S mediante retroazione dello stato, allora *i sottospazi di raggiungibilità dei due sistemi coincidono*

$$\forall\, K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}^+_{S_k} = \mathcal{V}^+_S$$

- *Gli autovalori del sottospazio non raggiungibile non cambiano*. Lo si vede mettendo S in forma standard di raggiungibilità. Ponendo $K = [K_1 \;\; K_2]$ si ottiene facilmente per il sistema controllato:

$$A + BK = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N.B. $K_1: \quad m \times \rho \quad \longrightarrow \quad \rho$ = Dimensione sottospazio raggiungibile

$K_2: \quad m \times (n - \rho)$

Forma canonica di controllo

- Si consideri il sistema lineare stazionario *S = (A, b, C, d)* *ad un solo ingresso*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A\,x(t) + b\,u(t) \\
y(t) &= C\,x(t) + d\,u(t)
\end{aligned}
$$

- ***Proprietà.*** Il sistema *S* è raggiungibile se e solo se è equivalente ad un sistema $S_c = (A_c, b_c, C_c, d_c)$ in *forma canonica di controllo* (o di raggiungibilità), cioè un sistema in cui le matrici A_c e b_c hanno la struttura

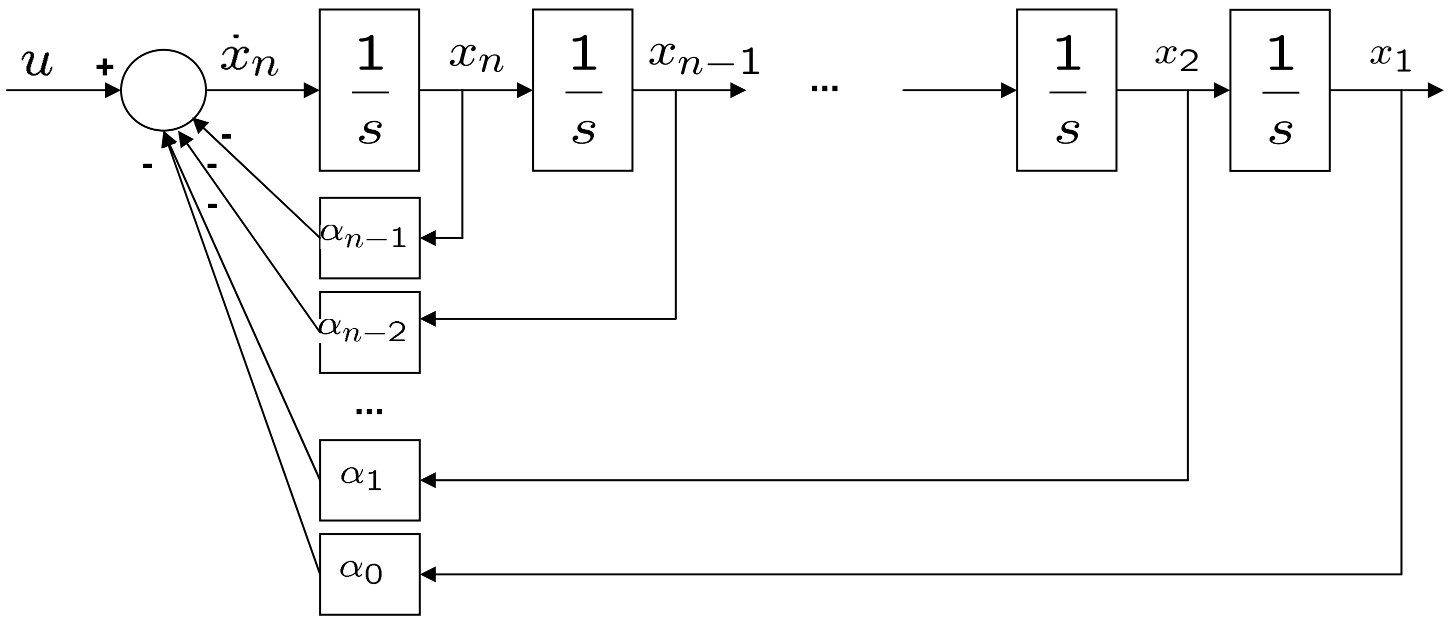
$$
A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

dove gli α_i sono i *coefficienti del polinomio caratteristico monico* della matrice *A*

$$
q_A(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_0
$$

- **Osservazione:** anche se l'ingresso "entra" solo nell'ultima componente del vettore *x*, la struttura di *A* fa sì che sia possibile "agire" su tutto il vettore *x*:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 \\ \dot{x}_2 & = x_3 \\ \dot{x}_3 & = x_4 \\ \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = x_n \\ \dot{x}_n & = -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 - \dots - \alpha_{n-1} x_n + u \end{cases}$$



Forma canonica di controllo

- La matrice di trasformazione T che permette di passare in forma canonica di controllo $x_c = T x$ è definita come

$$T = P_1 \, P_{1c}^{-1}$$

Dove:

- P_1 è la matrice di raggiungibilità del sistema S: $P_1=[b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b]$
- P_{1C} è la matrice di raggiungibilità del sistema
  S_C : $P_1=[b_C , A_C b_C , A_C{}^2 b_C , \ldots, A_C{}^{n-1} b_C]$
- $(P_{1C})^{-1}$ ha la struttura

$$(P_{1c})^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

α_i : coeff. del polinomio caratteristico monico della matrice A

$$q_A(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

- **Esempio**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P_1 = [B,\ AB,\ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 29 \end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - \lambda + 7 \qquad P_{1c}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = P_1(P_{1c}^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2857 & 0.0714 & -0.0714 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In forma di controllabilità:
Coeff. del polinomio caratteristico

Allocazione degli autovalori

- ***Proprietà.*** Si consideri il sistema lineare stazionario $S = (A, b, C, d)$ ad un solo ingresso e completamente raggiungibile. Per ogni polinomio monico $p(\lambda)$ di grado n esiste una matrice k^T di dimensioni $1 \times n$ tale che il polinomio caratteristico della matrice di stato $A + b\, k^T$ del sistema retroazionato coincide proprio con $p(\lambda)$.

- *Dim.* Siano infatti α_i, $i = 1, \ldots, n$ i coeff. del polinomio caratteristico $q_A(\lambda)$ di A

$$q_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

e siano d_i, $i = 1, \ldots, n$ i coeff. del polinomio desiderato $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_0$$

La coppia (A, b) è controllabile, e quindi esiste una trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo

$$x_c = T^{-1}x, \quad A_c = T^{-1}AT, \quad b_c = T^{-1}b$$

Allocazione degli autovalori

- Adottando una legge di controllo del tipo:

$$u(t) = k_c^T x_c(t) + v(t) \qquad k_c^T = [k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_{n-1}]$$

Si ottiene:

$$\dot{x}_c(t) \quad = \quad (A_c + b_c k_c^T)\, x_c(t) + b_c\, v(t)$$

con:

$$A_c + b_c k_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ k_0 - \alpha_0 & k_1 - \alpha_1 & & & k_{n-1} - \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$q(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_0 - k_0)$$

si ottiene il risultato voluto ponendo $\boxed{k_i = \alpha_i - d_i}$

N.B. $\quad k^T = k_c^T T^{-1} = k_c^T (P_1\ P_{1c}^{-1})^{-1}$

Allocazione degli autovalori

- *Esempio:* calcolare la matrice dei guadagni della retroazione statica dello stato $u(t) = k^T x(t)$ che posizioni in $-1, \; -2, \; -2$ gli autovalori del sistema complessivo.

$$\dot{x}(t) \; = \; A\,x(t) + b\,u(t) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P_1 = [b \;\; Ab \;\; A^2 b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile in quanto $rank(P_1) = 3$

Il polinomio caratteristico di A e quello desiderato sono rispettivamente

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda + 1) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4$$

Da cui

$$\begin{aligned} k_c^T &= [\alpha_0 - d_0, \;\; \alpha_1 - d_1, \;\; \alpha_2 - d_2] \\ &= [-3, \;\; -9, \;\; -6] \end{aligned}$$

Allocazione degli autovalori

- Il vettore k^T si ottiene da $$k^T = k_c^T T^{-1} = k_c^T (P_1 P_{1c}^{-1})^{-1}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{1c}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dal pol. caratt. di A

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$P_{1c}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k^T &= [-3, \ -9, \ -6] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= [-3, \ -9, \ -6] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= [-3, \ -9, \ -6] \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \\ &= [-9, \ -6, \ 3] \end{aligned}$$

- Verifica:

$$
\begin{aligned}
A' = (A + bk^T) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-9, \ -6, \ 3] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -5 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \quad p_{A'}(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4$$

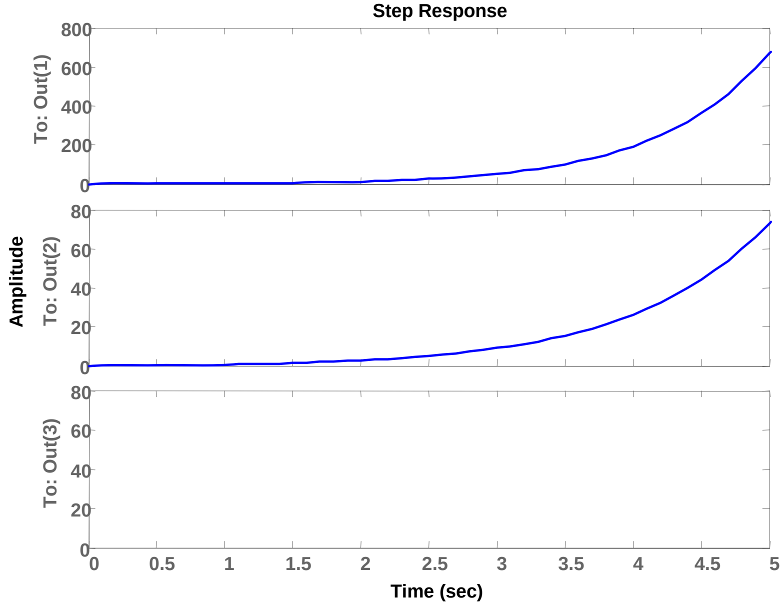
$$A_c = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'_c = T^{-1} A' T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

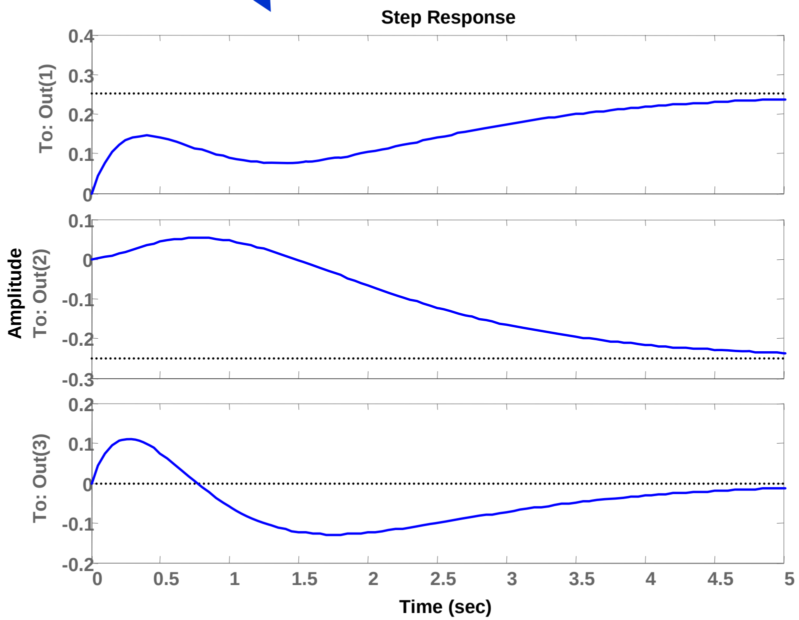
Allocazione degli autovalori

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$



Comportamento instabile degli stati



Comportamento stabile degli stati

Forma canonica di osservabilità

- ***Proprietà.*** Il sistema $S = (A, c)$ <u>*con una sola uscita*</u> è osservabile se e solo se è algebricamente equivalente ad un sistema $S_o = (A_o, c_o)$ in *forma canonica di osservabilità*, cioè un sistema in cui le matrici A_o e c_o hanno la struttura

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico monico della matrice A

$$q_A(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0$$

- La forma canonica di osservabilità si ottiene ponendo il sistema duale in forma canonica di controllo

Forma canonica di osservabilità

- Le matrici di osservabilità P_2 e P_{2o} del sistema originale e di quello in forma canonica di osservabilità sono legate dalla relazione

$$P_{2o} = P_2\, T$$

Ove T è la matrice di trasformazione $x = T\, x_o$ che porta il sistema originario in forma canonica di osservabilità.

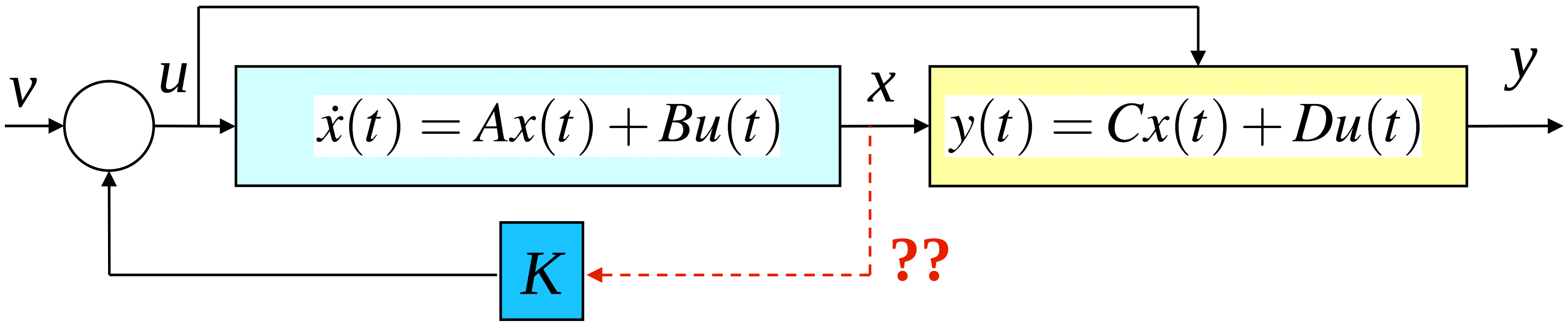
$$P_2\, T = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} cT \\ cT(T^{-1}AT) \\ cT(T^{-1}A^2T) \\ \vdots \\ cT(T^{-1}A^{n-1}T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_o \\ c_oA_o \\ c_oA_o^2 \\ \vdots \\ c_oA_o^{n-1} \end{bmatrix} = P_{2o}$$

$$\rightarrow \quad T = P_2^{-1}\, P_{2o} \qquad\qquad \rightarrow \quad T^{-1} = P_{2o}^{-1}\, P_2$$

N.B.: $A' = T^{-1}AT \qquad B' = T^{-1}B$

$C' = CT \qquad D' = D$

Stimatore dello stato



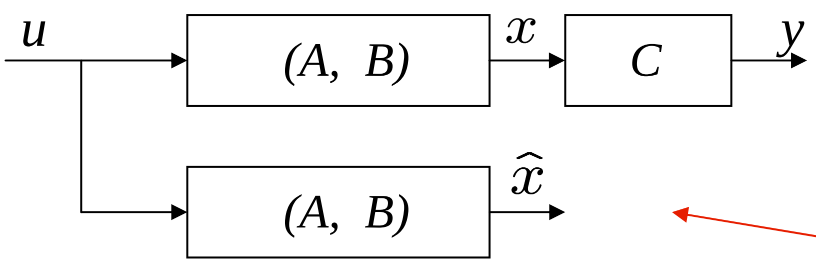
- Se lo stato del sistema non è noto, o direttamente accessibile per la misura, occorre progettare un "dispositivo" che consente di conoscere la sua evoluzione *x(t)* sulla base della conoscenza delle condizioni iniziali, dell'ingresso (e dell'uscita) del sistema.

- Tale "dispositivo" prende il nome di *stimatore (o osservatore) dello stato*.

- Vi sono stimatori:
  - *in catena aperta* - basati sulla conoscenza delle cond. iniziali e dell'ingresso
  - *in catena chiusa* – che sfruttano anche la conoscenza dell'uscita
  - *di ordine ridotto* – che non forniscono stime "ridondanti" dello stato x(t)

Stimatore dello stato – catena aperta

- Lo stimatore in catena aperta è una "copia" del sistema:



Sistema "fisico" (reale)

Modello matematico (simulato)

- Le equazioni dello stimatore in catena aperta sono

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) \; + \; B\,u(t)$$

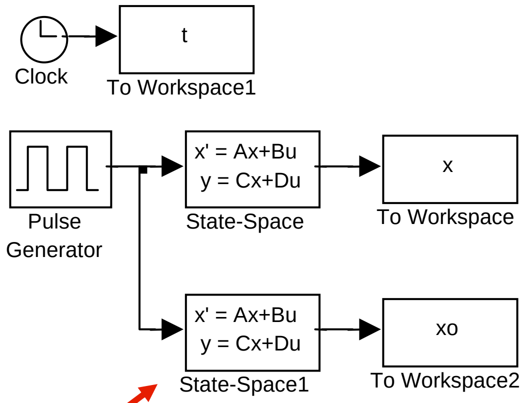
- Se si definisce l'errore di stima come $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) \\ &= Ae(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad e(t) = e^{At} e_0$$

La dinamica dell'errore dipende dagli autovalori di *A*:
- se il sistema è instabile, la stima diverge
- non si può influire sulla velocità di convergenza a zero

Stimatore dello stato – catena aperta

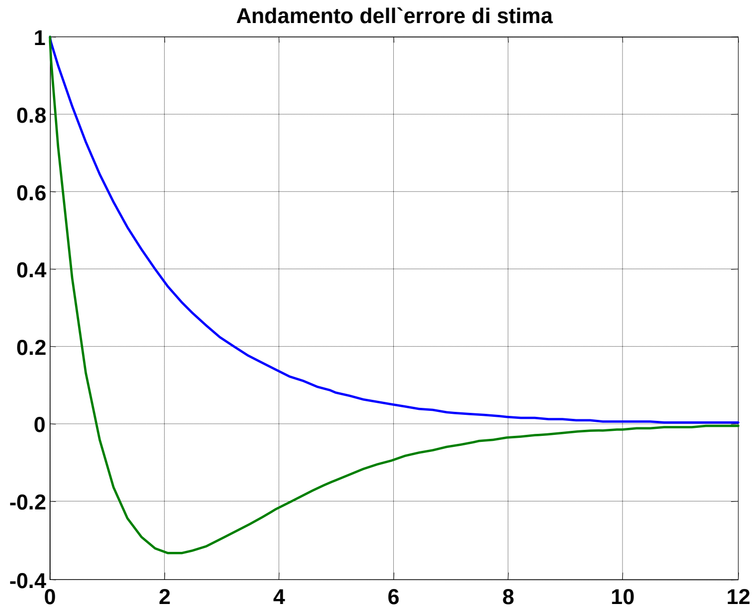


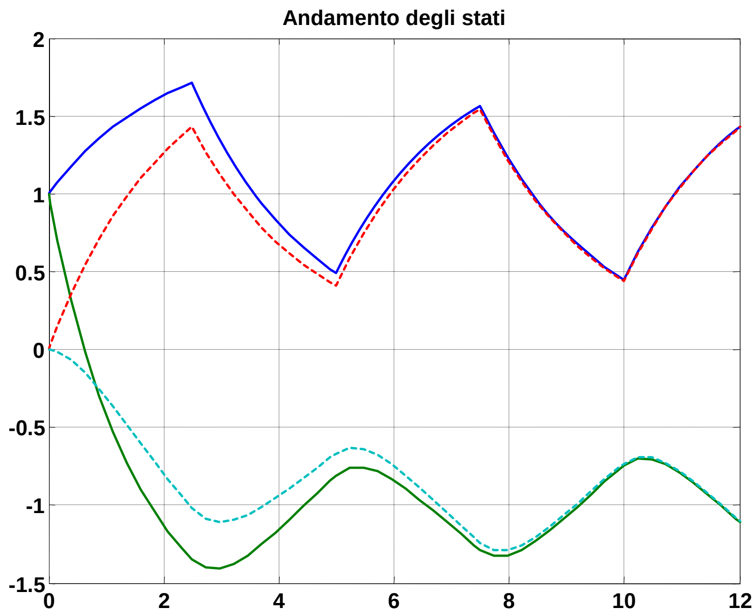
Osservatore:
"copia" del sistema

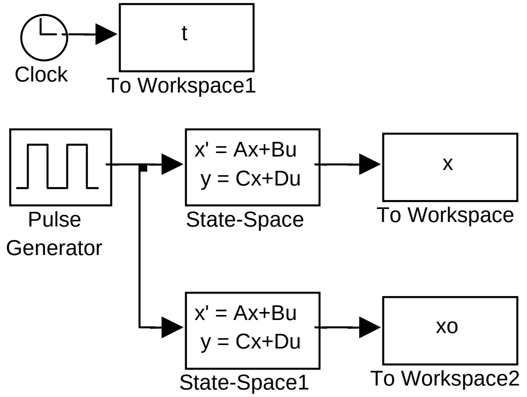
$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_o(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Non conosco
lo stato iniziale

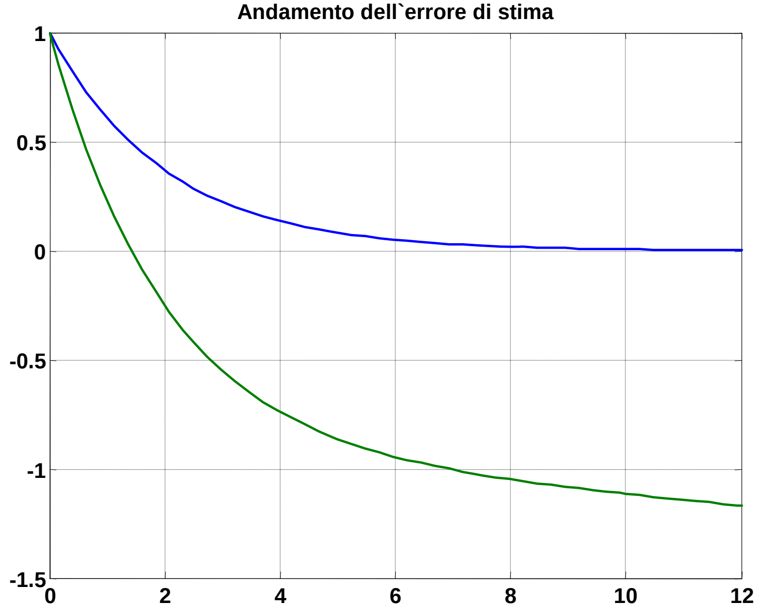


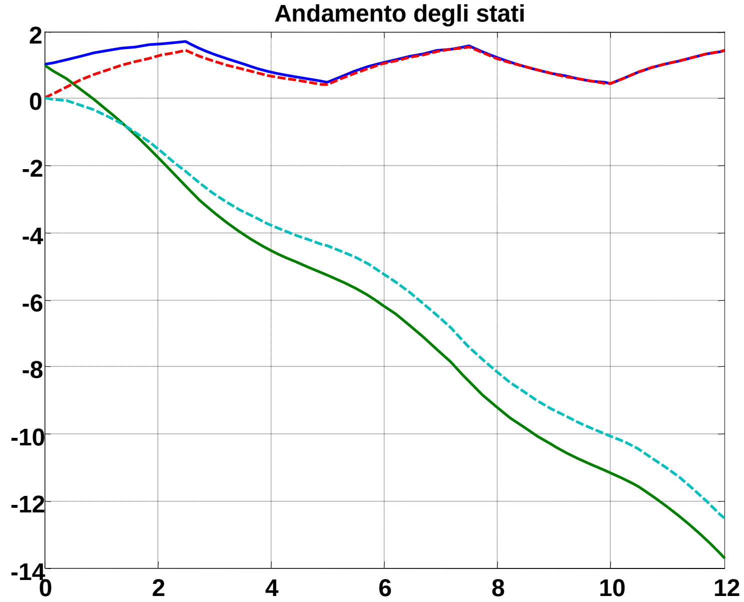




$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -1 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_o(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



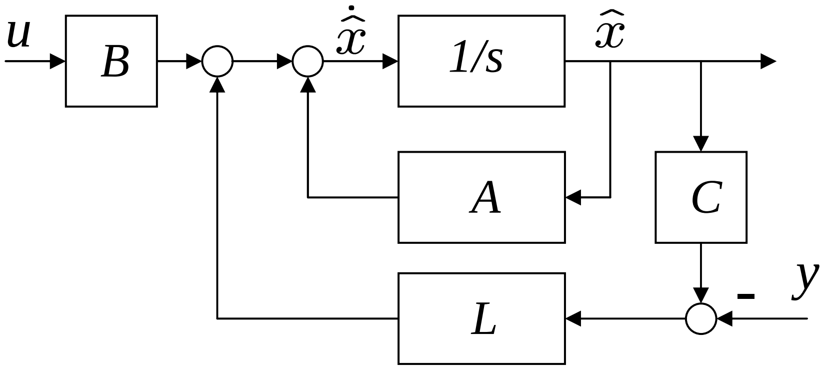


Stimatore dello stato in retroazione

- Per ovviare ai due inconvenienti citati in precedenza, si può ricorrere ad uno stimatore posto in retroazione, che viene detto *stimatore identità* (il suo stato tende ad essere identico a quello del sistema osservato)

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + LC)\hat{x}(t) + Bu(t) - Ly(t)$$

Dove *A, B, C* sono (copie di) le matrici del sistema osservato ed *L* una matrice scelta in modo opportuno.



In questo caso l'errore diviene

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - (A + LC)\hat{x}(t) + LCx - Bu(t) \\ &= (A + LC)e(t)\end{aligned}$$

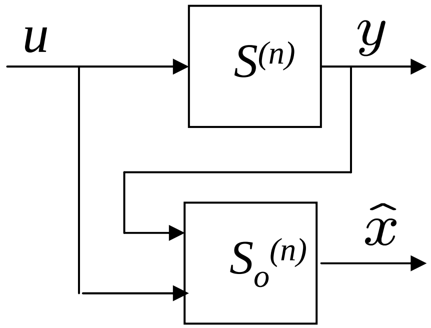
Stimatore dello stato in retroazione

$$
\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t)+Bu(t)-(A+LC)\hat{x}(t)+LCx-Bu(t) \\
&= (A+LC)e(t)
\end{aligned}
$$

- La dinamica dell'errore è definita dagli autovalori della matrice *(A+LC)*
- Per le proprietà dei sistemi duali, il polinomio caratteristico della matrice *(A+LC)* può essere assegnato arbitrariamente se e solo se la coppia (A^T, C^T) è completamente raggiungibile, ovvero *se e solo se la coppia (A, C) è completamente osservabile*.
- Per calcolare la matrice L, si considera la coppia (A^T, C^T) e si procede adottando le tecniche viste per l'allocazione degli autovalori nel caso di sistemi raggiungibili, ottenendo in questo modo la matrice L^T.
- Se la coppia *(A, C)* non è osservabile, la dinamica dell'errore di stima caratterizzata da *(A+LC)* ha dei modi fissi, sui quali non si può agire in alcuna maniera. In questi casi, la sintesi di uno stimatore asintotico dello stato è possibile solo se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile.

$$
L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \;\; 0] \quad \Rightarrow \quad (A+LC) = \begin{bmatrix} A_{11}+L_1C_1 & 0 \\ A_{21}+L_2C_1 & A_{22} \end{bmatrix}
$$

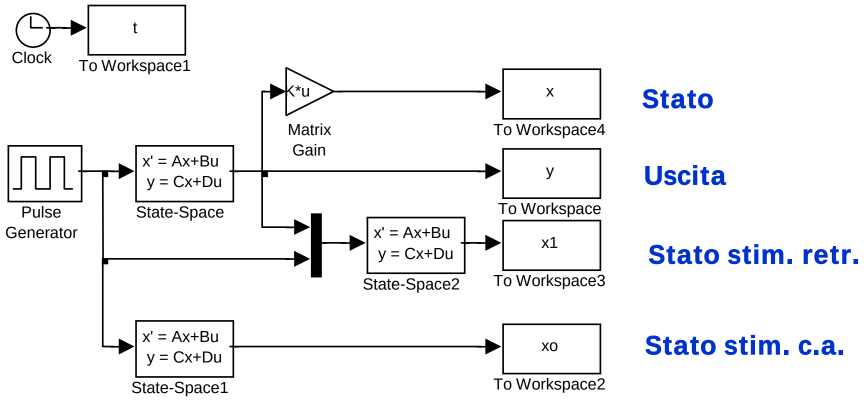
- Nella esposizione fatta per la sintesi dello stimatore, dato un sistema S di ordine n si definisce un secondo sistema dinamico S_s (lo stimatore) di ordine n ottenendo quindi un sistema "complessivo" di ordine $2n$.



- In genere, parte del vettore di stato può essere noto analizzando l'uscita $y = C\,x$, se la matrice C è nota.

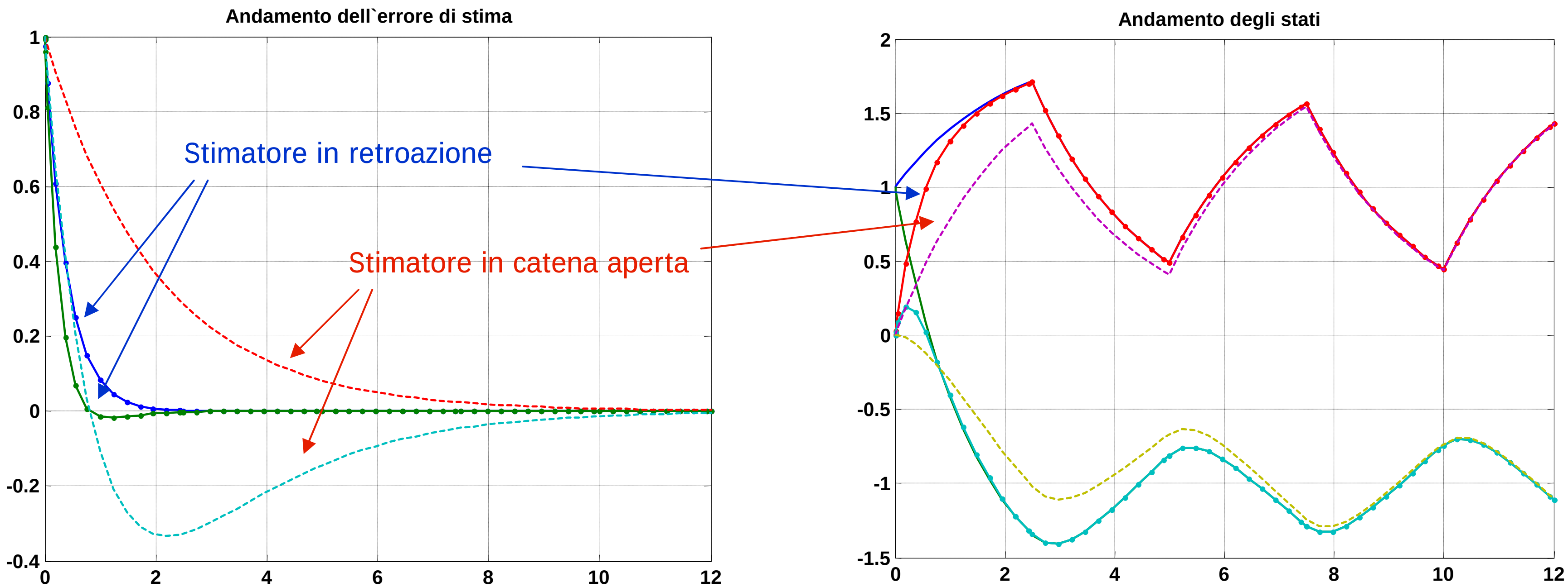
- Si può quindi pensare di definire uno stimatore che stimi le sole componenti non note del vettore di stato x: *stimatore di ordine ridotto*.

Stimatore dello stato in retroazione

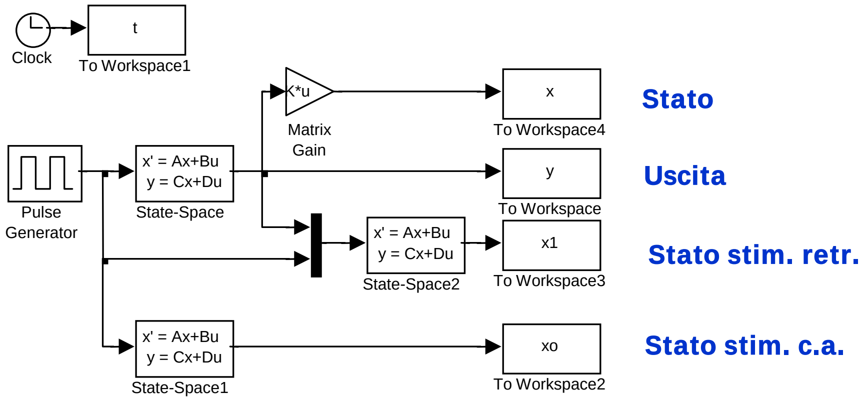


$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_o(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

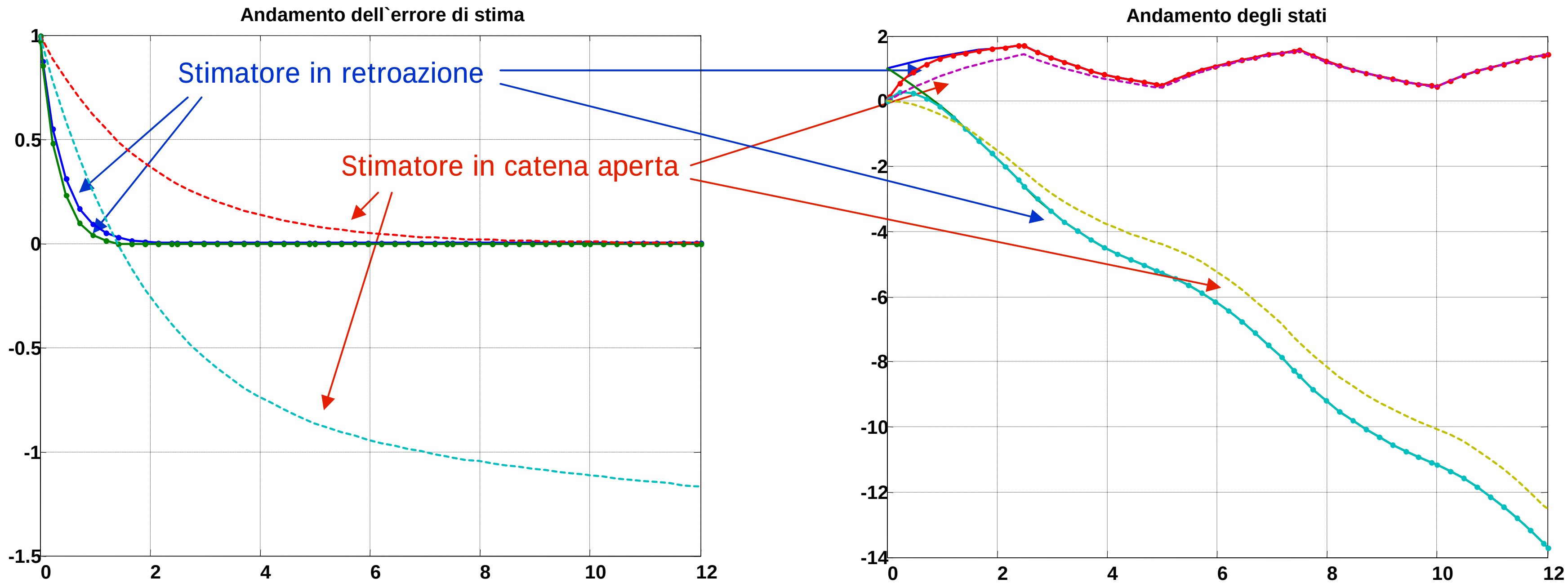


Stimatore dello stato in retroazione



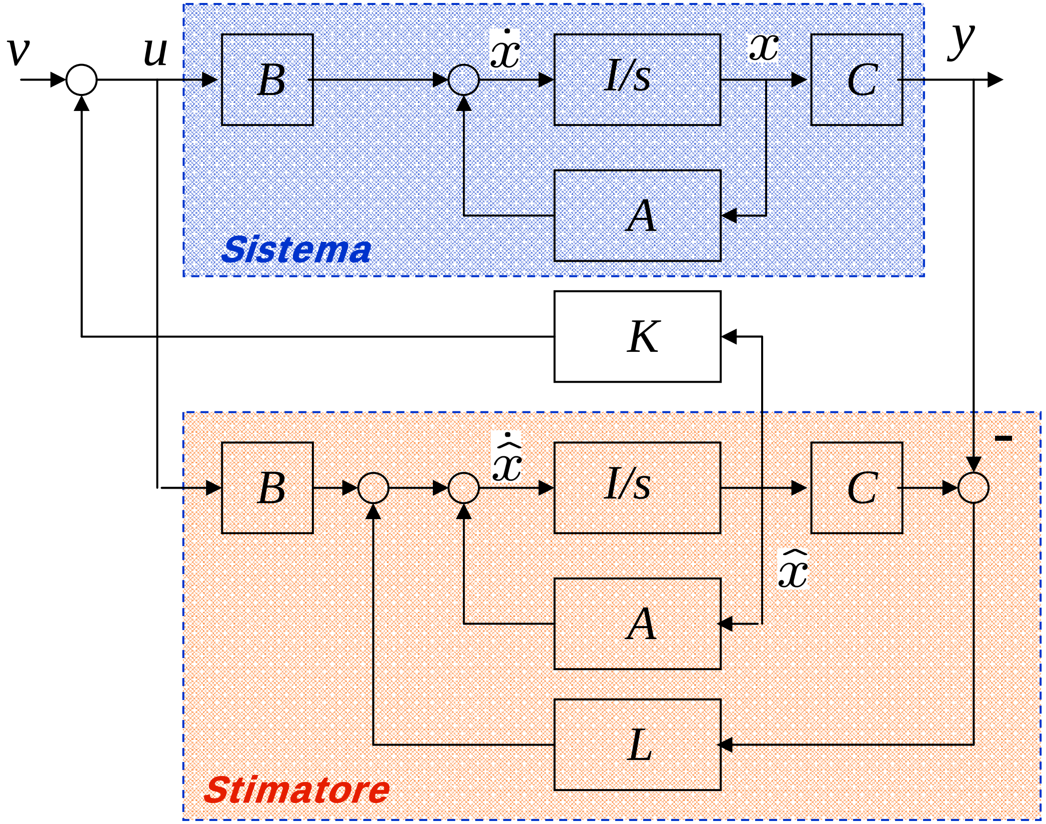
$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -1 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_o(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$



Sintesi del regolatore

- Si definisce *regolatore* il sistema composto dalla serie dello *stimatore dello stato* e dell'*elemento statico di retroazione K*



Sintesi del regolatore

- Le equazioni del sistema complessivo sono

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\
y(t) &= C\,x(t) \\
u(t) &= v(t) + K\hat{x}(t) \\
\dot{\hat{x}}(t) &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t))
\end{aligned}
$$

Da cui con semplici passaggi si ottiene

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,K\,\hat{x}(t) + B\,v(t) \\
y(t) &= C\,x(t) \\
\dot{\hat{x}}(t) &= (A + L\,C + B\,K)\,\hat{x}(t) - L\,Cx(t) + B\,v(t)
\end{aligned}
$$

Sintesi del regolatore

- Queste equazioni si possono raggruppare in forma matriciale in un sistema di ordine *2n*, definito come

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A & B\,K \\ -L\,C & (A+L\,C+B\,K) \end{bmatrix}}^{\bar{A}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}^{\bar{B}} v(t)$$

$$y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}^{\bar{C}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\,\bar{x}(t) + \bar{B}\,v(t) \\ y(t) &= \bar{C}\,\bar{x}(t) \end{aligned}$$

- Allo scopo di evidenziare alcune proprietà di questo sistema, si applica una trasformazione di stato definita come

$$x' = T\,\bar{x}, \qquad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = T$$

Sintesi del regolatore

- Si noti che la trasformazione appena introdotta

$$x' = T\bar{x}, \qquad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}, \quad \longrightarrow \quad x' = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}$$

genera un vettore di stato x' che ha come prima componente lo stato del sistema originale e come seconda componente la differenza tra x e la sua stima (errore di stima).

- Per quanto riguarda le matrici, si ottiene:

$$A' = \begin{bmatrix} (A + B\,K) & -B\,K \\ 0 & (A + L\,C) \end{bmatrix}, \qquad B' = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

Sintesi del regolatore

- Si noti che *la presenza dello stimatore non altera la relazione ingresso-uscita del sistema*: la matrice di trasferimento complessiva del sistema non cambia utilizzando una retroazione dello stato x anziché lo stato stimato.

- Da

$$A' = \begin{bmatrix} (A+B\,K) & -B\,K \\ 0 & (A+L\,C) \end{bmatrix}, \qquad B' = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = [C \quad 0]$$

- Si ha che

$$\begin{aligned} H(s) &= \bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B} = C'(sI-A')^{-1}B' \\ &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} [sI-(A+B\,K)]^{-1} & \star\star \\ 0 & [sI-(A+L\,C)]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C\,[sI-(A+B\,K)]^{-1}\,B \end{aligned}$$

Non dipende dallo stimatore!

Proprietà di separazione

- Si è visto che nel progetto di un controllo con retroazione del vettore di stato x è possibile effettuare l'allocazione degli autovalori del sistema dalla relazione $(A + BK)$, agendo sulla sola parte raggiungibile.

- Si può analogamente dimostrare che, se una misura diretta dello stato non è possibile, si può progettare uno stimatore con dinamica arbitraria definendo opportunamente gli autovalori di $(A+LC)$, ed agendo sulla parte osservabile.

- Si è infine visto che, in casi in cui sia necessario utilizzare uno stimatore per ottenere lo stato (una sua stima) x da utilizzare nel controllo, la definizione dello stimatore non influisce sul progetto del regolatore (e viceversa).

Proprietà di separazione

- Vale una *proprietà di separazione*. La sintesi di:
  - Blocco di regolazione, cioè l'allocazione degli autovalori di *(A+BK)*
  - Blocco di stima dello stato, cioè l'allocazione degli autovalori di *(A+LC)*

  può essere fatta in modo indipendente.

- Vale infatti la proprietà

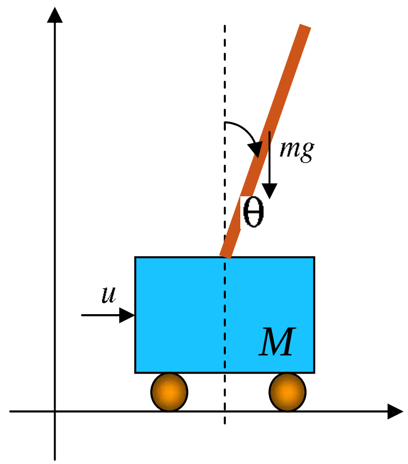
$$
\begin{aligned}
det(sI - A') &= det\left(\begin{bmatrix} (s\,I - A - B\,K) & -B\,K \\ 0 & (s\,I - A - L\,C) \end{bmatrix}\right) \\
&= det(s\,I - A - B\,K)\,det(s\,I - A - L\,C)
\end{aligned}
$$

Quindi gli autovalori del controllore e dello stimatore possono essere allocati indipendentemente.

- *Esempio:* controllo della posizione di un'asta verticale

  Stato: angolo θ dell'asta e sua velocità

  Uscita: angolo θ



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) = \dot{\theta} \\ \dot{x}_2(t) &= g\frac{ml}{J+ml^2}\, sin x_1 - \frac{ml}{J+ml^2}\frac{1}{M}\, u\, cos x_1 \end{aligned}$$

- Linearizzando nel punto di equilibrio: $x_1 = x_2 = 0 \ \text{per} \ u = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax + Bu \\ y(t) &= Cx \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \frac{ml}{J+ml^2},$$

$$\text{N.B.:} \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{g\alpha}\ !$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{M} \\ -\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank\{P_1\} = 2, \qquad rank\{P_2\} = 2$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \ \textbf{?} \qquad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \ \textbf{?}$$

- Proprietà di separazione:
  - *Blocco di regolazione:* poiché *(A,B)* è raggiungibile, si possono assegnare arbitrariamente gli autovalori di *(A+BK)*

Autovalori arbitrari

$$det(sI - A - BK) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 = (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\alpha - \frac{\alpha}{M}k_1 & -\frac{\alpha}{M}k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & -(\lambda_1+\lambda_2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad K = \left[(\lambda_1\,\lambda_2 \, + \, g\alpha)\frac{M}{\alpha}, \qquad (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{M}{\alpha}\right]$$

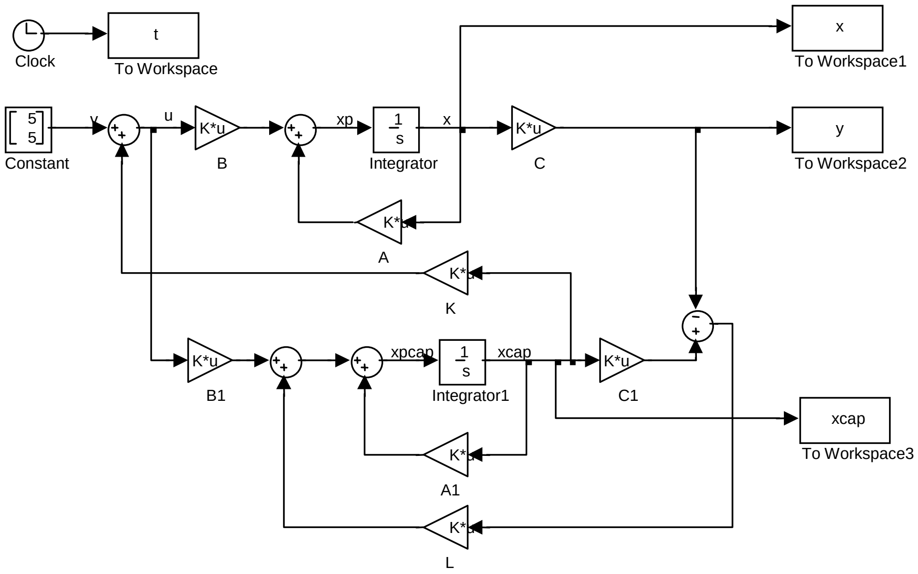
  - *Blocco di stima dello stato:* poiché *(A,C)* è osservabile, anche se solo x_1 è disponibile dall'uscita, si possono assegnare arbitrariamente gli autovalori di *(A+LC)*

Autovalori arbitrari

$$det(sI - A - LC) = (s+\lambda)^2$$

$$A + LC = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ g\alpha\ l_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s^2 - l_1 s - (g\alpha + l_2) = s^2 + 2\lambda s + \lambda^2 \Rightarrow L = \begin{bmatrix} -2\lambda \\ -\lambda^2 - g\alpha \end{bmatrix}$$

Sintesi del regolatore



Stato

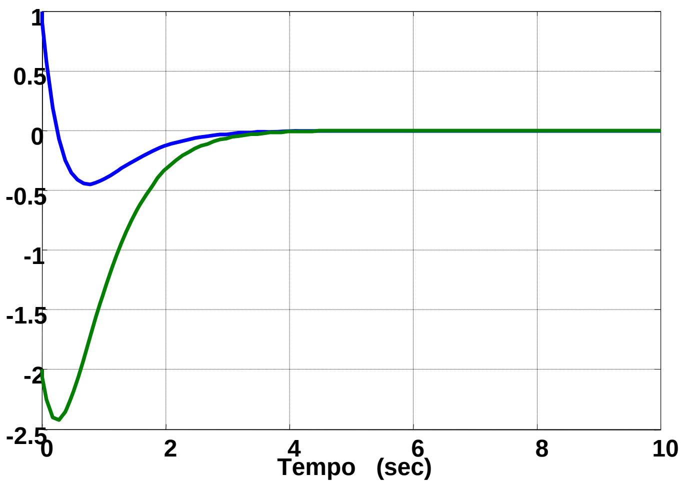
$$\alpha = 5, \quad M = 1$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda = 2$$

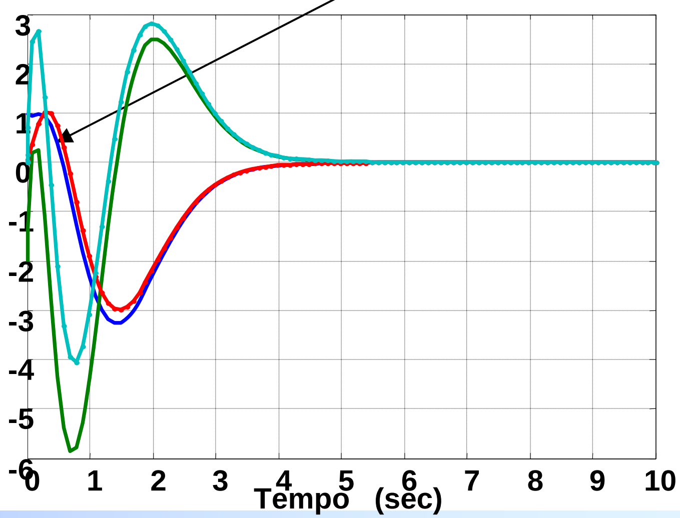
$$K = [10.41, \;\; 0.8] \qquad L = \begin{bmatrix} -4 \\ -53.05 \end{bmatrix}$$

Differenti condizioni iniziali per sistema reale e stimatore

Andamento errore di stima



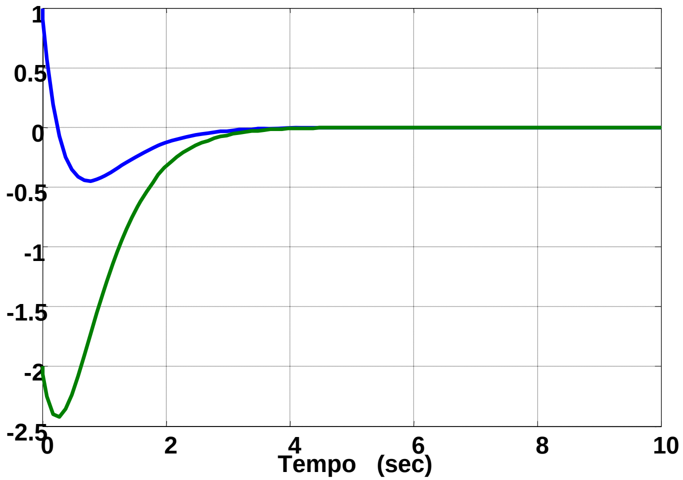
Andamento stati e loro stime

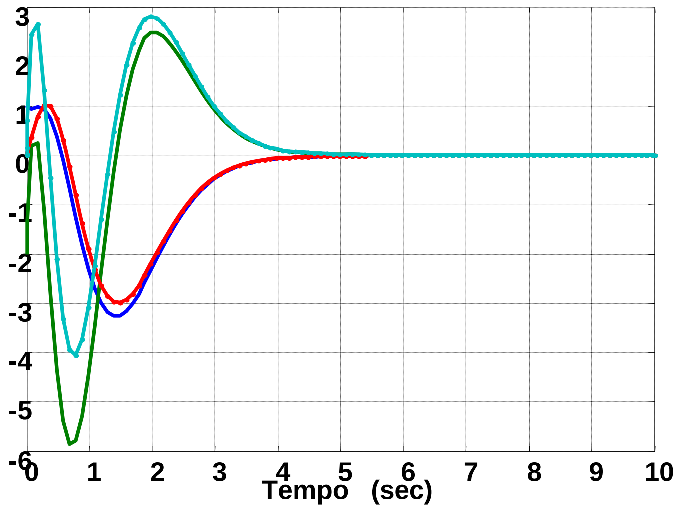


Sintesi del regolatore

Andamento errore di stima

Andamento stati e loro stime



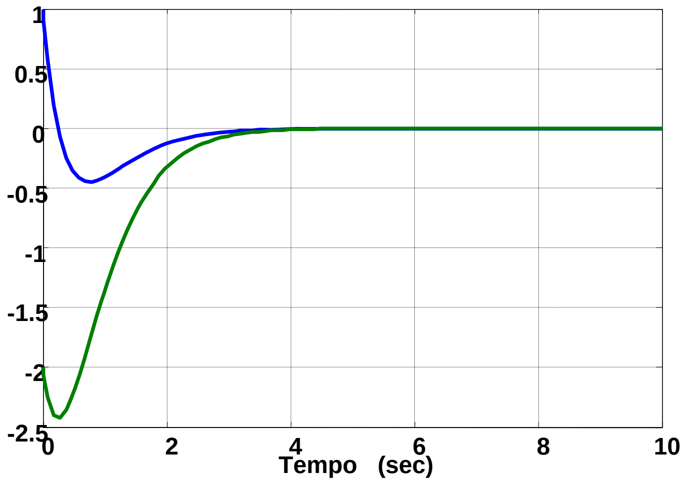


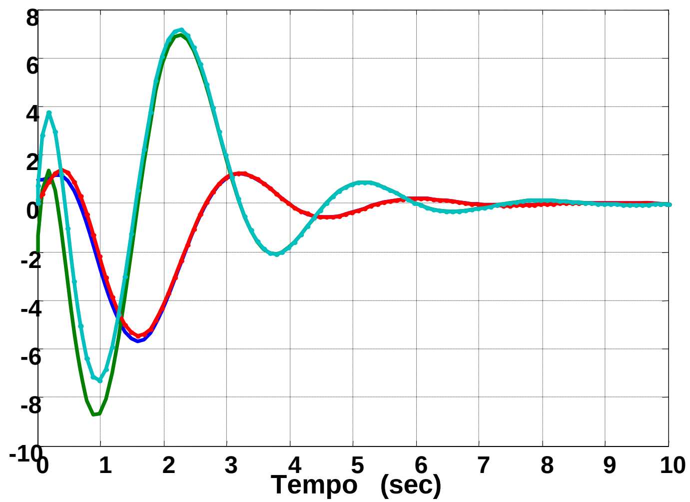
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

$$K = [10.41, \ \ 0.8]$$

$$\lambda = 2$$

$$L = \begin{bmatrix} -4 \\ -53.05 \end{bmatrix}$$





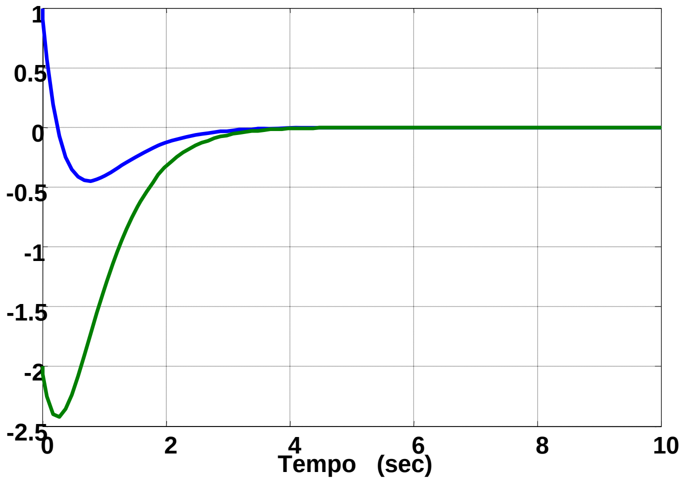
$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda_1 = 0.1, \quad \lambda_2 = 0.3 \\ K = [9.876, \ \ 0.266] \end{array}}$$

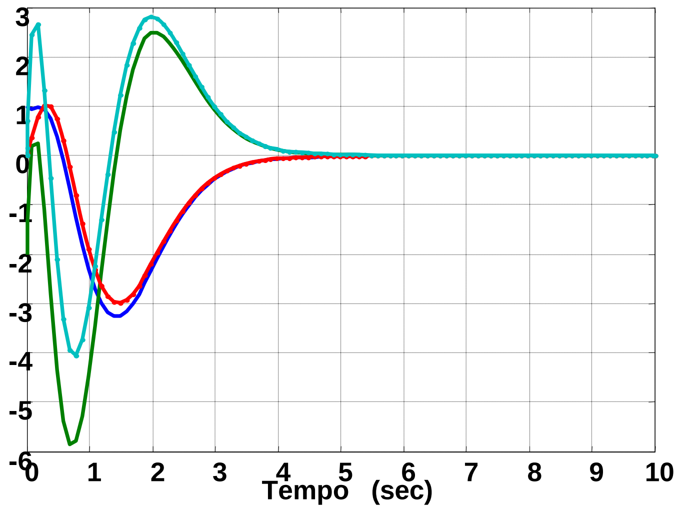
$$\lambda = 2$$

$$L = \begin{bmatrix} -4 \\ -53.05 \end{bmatrix}$$

Andamento errore di stima

Andamento stati e loro stime



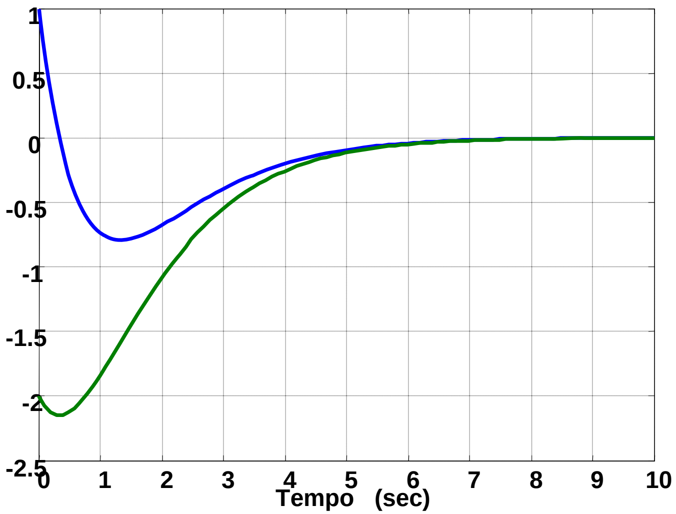


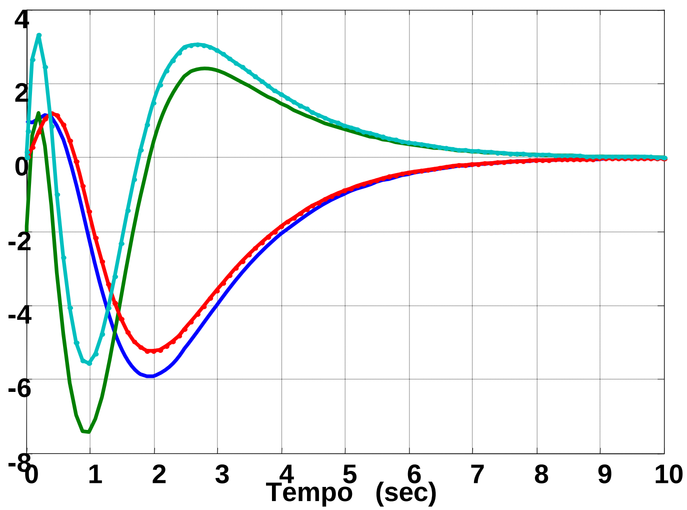
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

$$K = [10.41, \;\; 0.8]$$

$$\lambda = 2$$

$$L = \begin{bmatrix} -4 \\ -53.05 \end{bmatrix}$$





$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

$$K = [10.41, \;\; 0.8]$$

$$\boxed{\lambda = 1 \qquad L = \begin{bmatrix} -2 \\ -50.05 \end{bmatrix}}$$

CONTROLLI AUTOMATICI LS

Controllo con retroazione dello stato

FINE

Prof. Claudio Melchiorri

DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093034

e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri