CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Introduzione al controllo ottimo

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

Progetto di un sistema di controllo

Tecniche *“classiche”* - Basate su specifiche:

- nel dominio dei tempi (tempo di salita, sorpasso percentuale, errori a regime, ...)
- nel dominio delle frequenze (margini di fase e/o di ampiezza)

Progetto “iterativo” la cui soluzione, non univoca, viene spesso determinata per tentativi

Inconvenienti:

- Non estendibili facilmente a sistemi MIMO
- Non vi è considerazione esplicita della energia di controllo
- Non si può determinare la soluzione “ottima”
- Non applicabili a modelli non stazionari
- Se non si soddisfano le specifiche, non si può dire se è a causa dell’insufficienza delle tecniche a disposizione o per la incompatibilità di alcuni degli obiettivi

Progetto di un sistema di controllo

- Tecniche *"moderne"* - Basate sulla definizione di un *indice di comportamento* (Performance Index) di cui si vuole ottenere un minimo, per esempio:

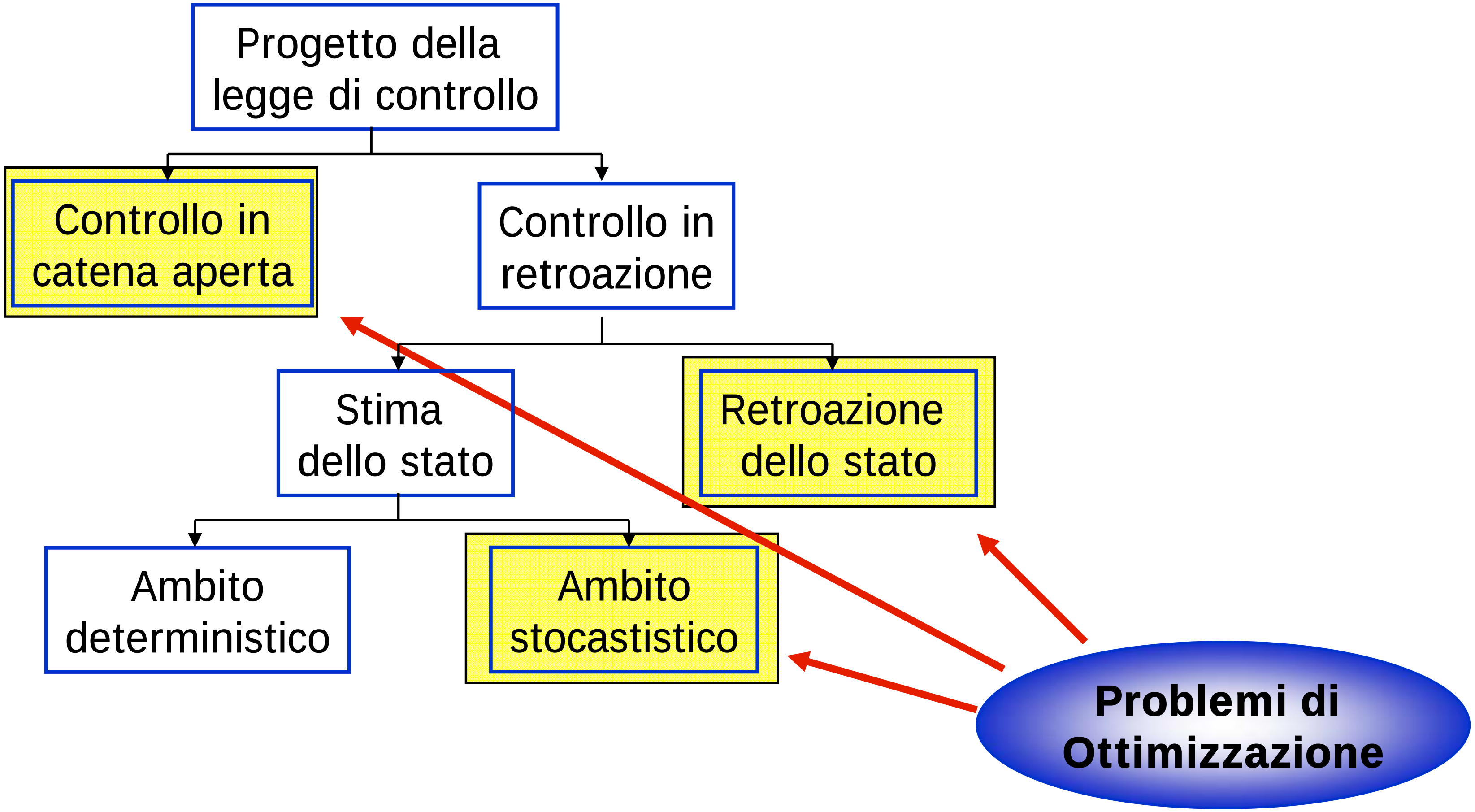
$$PI = \int_0^\infty e^2(t)\, dt$$

- Le prestazioni del sistema sono quindi definite *ottime* rispetto all'indice definito.

- In genere nella definizione dell'indice di comportamento si considerano diverse esigenze (talvolta contraddittorie tra loro) e si ottengono quindi *soluzioni di compromesso*.

- Problemi molto simili a quelli della ottimizzazione trattati in Ricerca Operativa.

Progetto di un sistema di controllo



- Sia dato il sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ u(t),\ t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

$$\chi[x(t_f), t_f] = 0 \qquad (2)$$

- Una espressione generale dell'indice di comportamento può essere la seguente

$$J = \beta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt \qquad (3)$$

"Peso" sullo stato finale ***"Peso" sulla evoluzione in [t_0, t_f]***

- *Problema del controllo ottimo:* determinare $u^o(t)$ in [t_0, t_f] in modo da minimizzare l'indice J.

Controllo ottimo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),\, u(t),\, t), \qquad x(t_0) = x_0 \\ \chi[x(t_f), t_f] &= 0 \end{aligned}$$

- La seconda equazione, che è vettoriale (in genere sono $q \leq n$ relazioni) ed algebrica, non è necessariamente presente nel modello del problema, e rappresenta *un insieme ammissibile per lo stato* all'istante finale t_f.
- Per avere soluzione, almeno uno degli elementi $\chi[x(t_f),\, t_f]$ deve essere raggiungibile da x_0.

- ***Condizione necessaria*** perché il problema di controllo ottimo descritto dalle (1)-(3) abbia soluzione, cioè che $u^o(t)$ se esiste sia ottimo, è che, definita la *funzione hamiltoniana*:

$$H(x,u,\lambda,t) = f_o(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t)$$

Funzione dell'indice di comportamento (f_o)

Co-stato o variabili aggiunte di dimensione *n* (come *x*) (λ)

Dinamica del sistema (f)

in corrispondenza di $u^o(t)$ sia verificato -*oltre che alle eq. (1) e (2)* - il seguente sistema di equazioni:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}^T, \qquad \lambda(t_f) = \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^T \right]_{t=t_f}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

dette *di Eulero-Lagrange*.

- Equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}^T, \qquad \lambda(t_f) = \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^T \right]_{t=t_f}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

  - la prima è detta del *sistema aggiunto*, in quanto definisce la dinamica delle co-variabili di stato.
  - la seconda è detta *condizione di stazionarietà*.
- Se l'istante t_f non è specificato, deve valere la seguente condizione

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\beta + \nu^T \chi) + H \right]_{t=t_f} = 0$$

- N.B. si hanno *condizioni iniziali* su x ($x(t_0) = x_0$) e *condizioni finali* su λ ($\lambda(t_f)$), cioè in due istanti temporali diversi (*two-point boundary problem)*. Questo in generale rende di difficile soluzione il problema della loro integrazione numerica.

- Nel caso stazionario la condizione appena vista diviene

$$H(x,u,\lambda) \;=\; f_o(x,u) + \lambda^T(t) f(x,u)$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u}$$

ma:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f^T(x,u) = \dot{x}^T, \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}^T, \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{dH}{dt} = 0$$

H è costante sulla traiettoria ottima

Controllo ottimo

Vi sono alcuni casi particolari di controllo ottimo di grande interesse:

1) Non esistono vincoli sullo stato per $t = t_f$

2) Vi sono vincoli espressi da equazioni algebriche separate nelle variabili di stato

3) Il criterio di bontà è dato dalla durata $T = t_f - t_0$ (controllo in tempo minimo)

4) Controllo ***"LQ"*** (Lineare Quadratico)

1. Controllo ottimo senza vincoli finali

- L'insieme ammissibile per lo stato del sistema all'istante finale t_f coincide con l'intero spazio degli stati, ovvero non esiste l'eq. algebrica (2).
- Le eq.ni di Eulero-Lagrange si semplificano (le cond. al contorno) e si ha

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^T}{\partial x}, \qquad \lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \beta}{\partial x}^T\right]_{t=t_f}$$

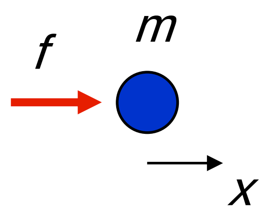
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

- Se l'istante t_f non è specificato, deve valere la seguente condizione

$$\left[\frac{\partial \beta}{\partial t} + H\right]_{t=t_f} = 0$$

1. Controllo ottimo senza vincoli finali

- **Esempio.** Sia dato un punto materiale di massa *m*, in moto rettilineo, e sia possibile applicare alla massa una forza *f* diretta come il moto. Sono note all'istante t_0 la posizione $x(t_0) = x_{10}$ e la velocità x_{20}



- Si vuole determinare la legge $f(t)$ in $[t_0, t_f]$, con $t_f = 10\ s$, in modo che all'istante t_f il punto materiale sia
  - *sufficientemente vicino* all'origine
  - *limitando sufficientemente* l'azione di controllo.

$$m\,\ddot{x}(t) = f(t), \qquad x(0) = x_{10}, \quad \dot{x}(0) = x_{20}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \qquad & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \qquad & x_2(0) = x_{20} \end{aligned}$$

Con <u>$u(t) = f(t)/m$</u>

1. Controllo ottimo senza vincoli finali

- L'indice di comportamento può essere scelto come

$$J = c_1\, x_1^2(t_f) + \int_0^{t_f} c_2\, u^2(t)\, dt \qquad\qquad c_1, c_2 > 0$$

Dove c_1 e c_2 sono opportune costanti definite in modo da quantificare i termini "sufficientemente". Sia $c_1 = c_2 = 1$ e $x_{10} = 1$ *m*, $x_{20} = 1$ *m/s*.

- Un possibile controllo *u(t)* potrebbe essere calcolato risolvendo il sistema di equazioni differenziali. Integrando le due equazioni differenziali si ottiene infatti:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_{20} + ut \\ x_1(t) &= x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}ut^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad x_1(t_f) = 0 = 1 + t_f + \frac{1}{2}u\, t_f^2$$

$$\longrightarrow \quad u = -\frac{11}{50} = -0.22 \quad \longrightarrow \quad J = c_1\, 0 + \int_0^{10} u^2 dt = 0.484$$

1. Controllo ottimo senza vincoli finali

- In questo caso però non si considera la penalizzazione sull'azione di controllo (sarebbe il controllo ottimo nel caso $c_2 = 0$)

$$J = c_1\, x_1^2(t_f) + \int_0^{t_f} c_2\, u^2(t)\, dt \qquad\qquad c_1, c_2 > 0$$

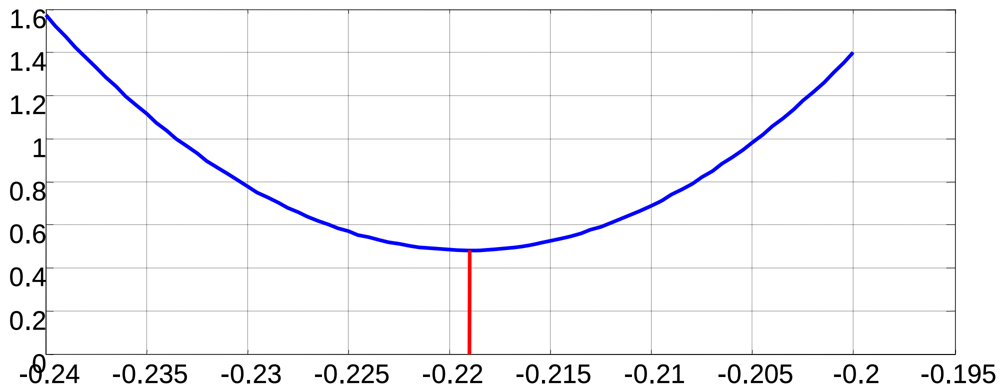
e ci si deve quindi aspettare che altre scelte di *u* forniscano valori minori di J. Scegliendo ad esempio:

$$u = -0.221 \qquad J = 0.4909 \qquad x_{1f} = -0.05, \quad x_{2f} = -1.21$$

$$\boxed{u = -0.219 \qquad J = 0.4821 \qquad x_{1f} = 0.05, \quad x_{2f} = -1.19}$$

$$u = -0.218 \qquad J = 0.4852 \qquad x_{1f} = 0.1, \quad x_{2f} = -1.18$$

$$u = -0.215 \qquad J = 0.5247 \qquad x_{1f} = 0.25, \quad x_{2f} = -1.15$$



1. Controllo ottimo senza vincoli finali

- Applicando il criterio derivante dalla funzione hamiltoniana

$$H(x,u,\lambda) \;=\; f_o(x,u)+\lambda^T(t)f(x,u)$$

$$\lambda^T = [\lambda_1, \;\; \lambda_2]$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

Si ha (c_1 = c_2 = 1)

$$\boxed{H(x,u,\lambda) \;=\; u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u}$$

e

$$\boxed{J = x_1^2(t_f)+\int_0^{t_f} u^2(t)\; dt}$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_2}=\lambda_1,} \quad \boxed{\frac{\partial H}{\partial u}=2u+\lambda_2,} \quad \boxed{\frac{\partial \beta}{\partial x_1}=2x_{1f}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial x_2}=0}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= 0, & \lambda_1(t_f) &= 2x_{1f} \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\lambda_1(t), & \lambda_2(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1(t) &= 2x_{1f} \\ \lambda_2(t) &= -2(t-t_f)x_{1f} \end{aligned}$$

$$u(t) \;=\; -\frac{1}{2}\lambda_2(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = (t-t_f)x_{1f}$$

1. Controllo ottimo senza vincoli finali

- Si devono ora calcolare gli stati finali integrando le equazioni del modello:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2} x_{1f}\, t^2 - x_{1f}\, t_f\, t + x_{20} \\ x_1(t) &= \frac{1}{6} x_{1f}\, t^3 - \frac{1}{2} x_{1f}\, t_f\, t^2 + x_{20}\, t + x_{10} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad x_{1f} = \frac{x_{20}\, t_f + x_{10}}{1 + \frac{1}{3} t_f^3} \approx -0.0329$$

- Da cui infine la legge di controllo ottimo $\boxed{u^o(t) = -0.0329(10 - t)}$

Integrando in questo caso si ottiene

$$x_2(t_f) = -0.645\, m/s, \qquad x_1(t_f) = 0.0329\, m, \qquad \boxed{J = 0.362}$$

- L'espressione (2) che definisce i vincoli sullo stato all'istante finale può talvolta essere espressa in modo che i vincoli sulle singole variabili di stato siano indipendenti gli uni dagli altri (vincoli separati). Si ha dunque

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),\, u(t),\, t), & x(t_0) = x_0 \\ x_i(t_f) &= \chi_i, & i = 1, 2, \ldots, q \leq n \end{aligned}$$

$$J = \beta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)\,dt$$

- La condizione al contorno (per $t = t_f$) nelle eq.ni di Eulero-Lagrange è

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^T}{\partial x}, \qquad \lambda(t_f) = \begin{cases} \nu_i, & i = 1, 2, \ldots, q \\ \left[\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\right]_{t=t_f} & i = q+1, \ldots, n \end{cases}$$

- ν_i sono opportune costanti da definire nel progetto

- **Esempio.** Si consideri ancora il punto materiale di massa m, in cui si impone che la velocità all'istante finale t_f sia assegnata $x_2(t_f) = x_{2f}$
- Il modello per il controllo ottimo è allora

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \qquad x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \qquad x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(t_f) = x_{2f} \end{aligned}$$

- Si supponga di voler minimizzare l'energia di controllo

$$J = \int_0^{t_f} u^2(t)\, dt, \qquad t_f > 0 \quad \text{assegnato}$$

$$H(x,u,\lambda) = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda_2, \quad \underline{\frac{\partial \beta}{\partial x_1} = 0,} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x_2} = 0$$

Uso solo questo termine

- Dalle eq.ni di Eulero-Lagrange si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= 0, \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\lambda_1(t), \\ u(t) &= -\frac{1}{2}\lambda_2(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1(t_f) &= 0 \\ \lambda_2(t_f) &= \nu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1(t) &= 0 \\ \lambda_2(t) &= \nu \\ u(t) &= -\frac{1}{2}\nu \end{aligned}$$

- Integrando le eq.ni differenziali

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{1}{2}\nu t + x_{20} \\ x_2(t_f) &= x_{2f} = -\frac{\nu}{2}t_f + x_{20} \\ \nu &= \frac{2}{t_f}(x_{20} - x_{2f}) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad u^o(t) = -\frac{x_{20} - x_{2f}}{t_f}$$

costante

3. Controllo ottimo in tempo minimo

- Un problema di controllo è detto in *tempo minimo* quando il criterio di giudizio della bontà del controllo è dato dalla lunghezza del periodo $[t_0 - t_f]$ durante il quale si applica il controllo.
- Il sistema è quindi

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\, u(t),\, t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

$$\chi[x(t_f), t_f] = 0 \qquad (2)$$

- E l'indice di comportamento è semplicemente

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

- Si noti che in questo tipo di problema in genere è definito il vincolo (2) in quanto altrimenti non sarebbe specificata la condizione da raggiungere e quindi la soluzione sarebbe $t_f = t_0$.

3. Controllo ottimo in tempo minimo

- La funzione hamiltoniana diventa

$$H(x,u,\lambda,t) \;=\; 1 \;+\; \lambda^T(t)\; f(x,u,t)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\dot{\lambda}(t) \;=\; -\frac{\partial H}{\partial x}^T \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}^T \lambda(t), \qquad\qquad \lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \chi}{\partial x}^T \nu\right]_{t=t_f}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} \;=\; \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

Se l'istante t_f non è specificato, deve valere la seguente condizione

$$\left[\frac{\partial \nu^T \chi}{\partial t} + \lambda^T f\right]_{t=t_f} + 1 = 0$$

4. Controllo ottimo LQ

- Ha grande importanza il caso in cui
  - il sistema dinamico da controllare è di tipo *lineare*
  - le funzioni che compaiono nell'indice di comportamento sono *quadratiche*

  Questo tipo di problemi viene detto *LQ (Lineare – Quadratico)*

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

$$J = x^T(t_f)\,S_f\,x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + \underline{u^T(t)R(t)u(t)}]\,dt$$

Potenza di controllo

$$S_f = S_f^T \geq 0 \qquad Q(t) = Q(t)^T \geq 0 \qquad \underline{R(t) = R(t)^T > 0}$$

Strettamente d.p.

- Solitamente le matrici S_f, Q e R sono scelte *diagonali* (elementi penalizzanti i quadrati delle singole componenti di x_f, x ed u).

- Si può dimostrare che *condizione necessaria* per la soluzione del problema è che definita la funzione hamiltoniana

$$H = x^T Q x + u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

risulti

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) = x_0 \\
\dot{\lambda} &= -H_x^T = -2Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t), & \lambda(t_f) = 2S_f x(t_f) \\
H_u^T &= 2R(t)u(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0
\end{aligned}$$

Da cui $\rightarrow$ $$u(t) = -\frac{1}{2}\underline{R^{-1}}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

Matrice R invertibile!

- Caso particolarmente interessante: $S_f = Q(t) = 0$ e $R(t) = I$.

  Con solamente queste condizioni, la soluzione ottima sarebbe $u(t) = 0$.

  Si impongono soluzioni anche sullo stato finale $x(t_f)$, con t_f assegnato. Se il sistema è stazionario:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)u(t)\,dt$$

Il problema consiste nel trovare il controllo a minima energia in grado di trasferire lo stato da uno stato iniziale assegnato ad uno finale assegnato anch'esso. Si suppone che il sistema sia completamente controllabile.

La condizione necessaria è

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\lambda} &= -A^T\lambda(t), & \lambda(t_f) &= \lambda_f \\ u(t) &= -\frac{1}{2}B^T\lambda(t) \end{aligned}$$

- Si deve calcolare il termine $\lambda(t)$. Dalla penultima equazione si ha

$$\lambda(t) = e^{-A^T(t-t_f)}\lambda_f$$

- E quindi

$$u(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)e^{-A^T(t-t_f)}\lambda_f$$

- Sostituendo nel modello del sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - \frac{1}{2}B(t)B^T(t)e^{-A^T(t-t_f)}\lambda_f$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-A(t-\tau)}BB^T e^{-A^T(t-\tau)}\lambda_f d\tau \\ x_f &= e^{At_f}x_0 - \frac{1}{2}\int_0^{t_f} e^{-A(t_f-\tau)}BB^T e^{-A^T(t_f-\tau)}\lambda_f d\tau \\ &= e^{At_f}x_0 - \frac{1}{2}W_c^2(t_f)\lambda_f \end{aligned}$$

- Si è ottenuto

$$x_f \;=\; e^{A\,t_f}x_0 - \frac{1}{2}W_c^2(t_f)\lambda_f$$

La matrice W_c è detta *gramiano di controllabilità* (invertibile se il sistema è completamente controllabile). Si ricava dunque λ_f come

$$\lambda_f \;=\; -2[W_c^2(t_f)]^{-1}(x_f - e^{A\,t_f}x_0)$$

ed infine la legge di controllo ottimo:

$$\boxed{u(t) \;=\; B^T e^{-A(t-t_f)}[W_c^2(t_f)]^{-1}(x_f - e^{A\,t_f}x_0)}$$

➡ Controllo a minima energia che porta lo stato dal valore iniziale x_0 a quello finale x_f nell'intervallo [t_0 - t_f].

CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Controllo ottimo
Parte 2 – Controllo ottimo LQ

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

Controllo ottimo

- Problema di controllo ottimo in $[t_0 - t_f]$:
  - ***Catena aperta:*** NON dipende da *x(t),* progetto sulla base di conoscenze pregresse (stato e modello)
  - ***In retroazione:*** dipende da *x(t),* aumenta la robustezza

- NB. Il “controllo ottimo” è unico! Volendo definire una legge di controllo ottimo in retroazione, non si cerca *una diversa legge di controllo* (se esiste è unica) ma *una sua differente realizzazione!*

- ***In retroazione:*** espressa in funzione di *x(t)* anziché di *t*.

  Può essere *ottima*?

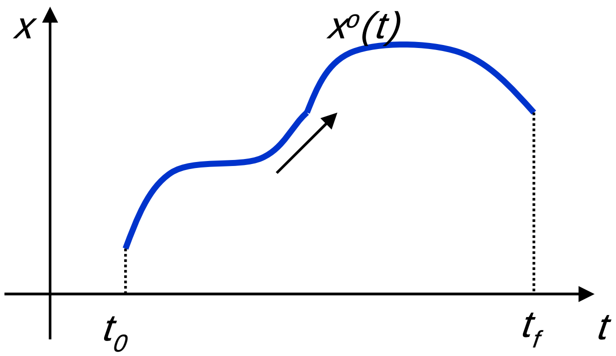
Controllo ottimo

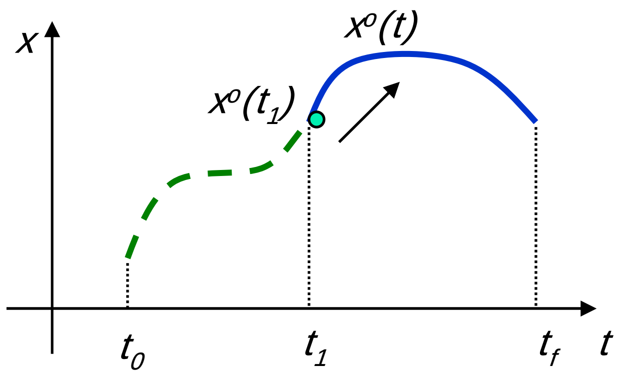
- ***Principio di ottimalità (di Bellman)***

  Se la legge di controllo $u^o(t)$, definita in $[t_0, t_f]$, è ottima rispetto ad un dato problema con condizioni iniziali (x_0, t_0) e ad essa è associato l'andamento $x^o(t)$, allora la stessa legge di controllo è ottima in $[t, t_f]$ relativamente allo stesso problema con condizioni iniziali $[x^o(t), t]$ per ogni $t \in [t_0, t_f]$.

  Segue che se $u^o(t)$ è una legge di controllo ottima in $[t_0, t_f]$, essa si può esprimere in ogni istante t come funzione di $x^o(t)$, cioè

$$u^o(t) = u^o[x^o(t), t], \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$





- *Non viene specificato come calcolare $u^o(t)$ in funzione di $x(t)$.*

Controllo ottimo LQ

- Controllo ottimo LQ
  - il sistema dinamico da controllare è di tipo *lineare*
  - le funzioni che compaiono nell'indice di comportamento sono *quadratiche*

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

$$J = x^T(t_f)\,S_f\,x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right] dt$$

$$S_f = S_f^T \geq 0 \qquad Q(t) = Q(t)^T \geq 0 \qquad R(t) = R(t)^T > 0$$

- Si può dimostrare che condizione necessaria per la soluzione del problema è che definita la funzione hamiltoniana

$$H = x^T Q x + u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

risulti

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda} &= -H_x^T = -2Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t), & \lambda(t_f) = 2S_f x(t_f) \\ H_u^T &= 2R(t)u(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0 \end{aligned}$$

Da cui $u(t) = -\frac{1}{2} R^{-1}(t) B^T(t) \lambda(t)$

→ *Come calcolare $\lambda(t)$? ?*

Controllo ottimo LQ

- Per il vettore di co-stato $\lambda(t)$ si hanno le condizioni al contorno (all'istante finale t_f) espresse dalla relazione lineare $\lambda(t_f) = 2\, S_f\, x(t_f)$.

- E` possibile trovare una relazione simile (lineare) tra $\lambda(t)$ e $x(t)$ per ogni istante t nell'intervallo $[t_0,\ t_f]$?

  Si cerca in altre parole una espressione per λ del tipo

$$\lambda(t) = 2S(t)\, x(t), \qquad S(t_f) = S_f$$

- Se così fosse, allora λ dipenderebbe dallo stato x e quindi anche l'azione di controllo u(t) sarebbe funzione di x!

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \\ &= -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t) \\ &= K(t)x(t) \end{aligned}$$

- Il problema è dunque quello del calcolo della matrice *S(t)*.

- Per il calcolo di S(t) si procede come segue. Si deriva la relazione

$$\lambda(t) = 2S(t)\, x(t), \qquad S(t_f) = S_f$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= 2\dot{S}(t)\, x(t) + 2S(t)\, \dot{x}(t) \\
&= 2\dot{S}(t)\, x(t) + 2S(t)\, [A(t)x(t) + B(t)u(t)] \\
&= 2\dot{S}(t)\, x(t) + 2S(t)\, [A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t)] \\
&= 2\{\dot{S}(t) + S(t)\, [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)]\}x(t)
\end{aligned}$$

- D'altra parte

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -2Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t) \\
&= -2[Q(t) + A^T(t)S(t)]x(t)
\end{aligned}$$

- Uguagliando le due relazioni si ottiene

$$\dot{S} + S(A - BR^{-1}B^T S) = -Q - A^T S$$

$$\boxed{\dot{S} + SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0, \qquad S(t_f) = S_f}$$

Controllo ottimo LQ

- L'equazione differenziale matriciale

$$\dot{S} + SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0, \qquad S(t_f) = S_f$$

viene detta *Equazione (matriciale) differenziale di Riccati*.

- Dato che le matrici S_f, Q ed R sono simmetriche, anche $S(t)$ lo è

- La matrice $K(t)$ che si ottiene definisce il controllo ottimo che rappresenta il compromesso tra l'esigenza di far tendere velocemente a zero le variabili di stato ottenendo uno stato finale prossimo a zero e quello di limitare l'azione di controllo.

- **Esempio.** Si consideri ancora il punto materiale di massa m in moto rettilineo e si supponga che all'istante t_0 il punto abbia una velocità x_0. Indicando con x(t) la velocità all'istante t, su vuole determinare una legge di controllo u(t) che renda minimo l'indice di comportamento

$$J = c\, x^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\; dt$$

- In questo caso (non si considera la posizione) si può esprimere il modello matematico del sistema con una equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{x}(t) = u(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

- La legge di controllo *in catena aperta* viene determinata assegnando la funzione hamiltoniana

$$H = f_0(x,u) + \lambda^T f(x,u) = u^2 + \lambda u$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda, \qquad \left[\frac{\partial \beta}{\partial x}\right]_{t_f} = 2cx_f$$

- Da

$$H = f_0(x,u) + \lambda^T f(x,u) = u^2 + \lambda u \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda, \qquad \left[\frac{\partial \beta}{\partial x}\right]_{t_f} = 2cx_f$$

- Le eq.ni di Eulero Lagrange diventano

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \lambda(t_f) = 2cx_f, \qquad &\Longrightarrow \quad \lambda(t) = 2cx_f \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 2u(t) + \lambda(t) = 0 &\Longrightarrow \quad u(t) = -cx_f \end{aligned}$$

- La *legge di controllo ottima in questo caso è dunque costante nel tempo*. Per il calcolo effettivo devo conoscere x_f. Integrando l'equazione di stato si ottiene facilmente

$$x(t) = x_0 - (t - t_0)cx_f, \qquad x_f = \frac{x_0}{1 + (t_f - t_0)c}$$

$$\boxed{u(t) = -\frac{x_0}{\frac{1}{c} + (t_f - t_0)},} \qquad x(t) = \frac{1 + (t_f - t)c}{1 + (t_f - t_0)c} x_0$$

Controllo ottimo: qui è costante nel tempo

- Volendo realizzare il *controllo in retroazione*, si deve risolvere l'equazione differenziale di Riccati

$$\dot{S} + SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0, \qquad S(t_f) = S_f$$

con *A = 0, B = 1, R = 1, Q = 0*. Si ottiene (caso scalare)

$$\dot{s}(t) - s^2(t) = 0, \qquad s(t_f) = c$$

$$\frac{ds}{dt} - s^2 = 0, \qquad \frac{ds}{s^2} = dt, \qquad -\frac{1}{s} = t + k, \qquad k = -\frac{1}{s_f} - t_f$$

$$s(t) = \frac{1}{\frac{1}{c} + t_f - t}, \qquad \boxed{u(t) = -\frac{x(t)}{\frac{1}{c} + t_f - t}} \longleftarrow \quad u(t) = -R^{-1}B^T S x(t)$$

La legge in retroazione quindi NON è costante presentando un guadagno variabile nel tempo

- Si sono dunque definite due espressioni per la legge di controllo ottima:
  la prima "in catena aperta" di tipo statico e la seconda con retroazione dello stato

$$u(t) = -\frac{x_0}{\frac{1}{c} + (t_f - t_0)}, \qquad u(t) = -\frac{x(t)}{\frac{1}{c} + t_f - t}$$

La "soluzione ottima" però deve essere unica…

- Calcolando l'evoluzione dello stato con la legge in catena aperta si era ottenuto

$$u(t) = -\frac{x_0}{\frac{1}{c} + (t_f - t_0)}, \quad \longrightarrow \quad x(t) = \frac{1 + (t_f - t)c}{1 + (t_f - t_0)c} x_0$$

- D'altra parte l'equazione differenziale che si ottiene con il controllo in retroazione

$$\dot{x}(t) = u(t) = -\frac{c x(t)}{1 + (t_f - t)c}, \qquad x(t_0) = x_0$$

ha proprio come soluzione $\quad x(t) = \frac{1 + (t_f - t)c}{1 + (t_f - t_0)c} x_0$

L'evoluzione è la stessa!

- Si può mostrare che il valore ottimo dell'indice di comportamento è:

$$J(x_0, t_0) \;=\; x_0^T\, S(t_0)\, x_0$$

Essendo *S(t)* la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati.

Tale valore, assegnato il criterio di ottimo, *dipende SOLO dalle condizioni iniziali!*

Infatti, detti

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ &= A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t) \\ &= [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)]x(t) \;=\; F(t)x(t) \end{aligned}$$

$$J \;=\; x^T(t_f)\, S_f\, x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)H(t)x(t)\, dt$$

$$H(t) = Q(t) + S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$$

- Con le due definizioni date per le matrici *F* ed *H*, l'equazione differenziale di Riccati

$$\dot{S} + SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0, \qquad S(t_f) = S_f$$

diventa

$$\dot{S} + F^T S + SF + H = 0 \qquad S(t_f) = S_f$$

Equazione simile ad una di Lyapunov!

Si definisca la funzione di Lyapunov: $V(x) = x^T \; S(t) \; x$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{x}^T S x + x^T S \dot{x} + x^T \dot{S} x \\
&= x^T F^T S x + x^T S F x + x^T [-F^T S - SF - H] x \\
&= -x^T \; H \; x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= x^T(t_f) \; S_f \; x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) H(t) x(t) \; dt \\
&= x^T(t_f) \; S_f \; x(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{V}(x) dt \\
&= \cancel{x^T(t_f) \; S_f} \; x(t_f) - \cancel{x^T(t_f) \; S_f} \; x(t_f) + x^T(t_0) \; S(t_0) x(t_0)
\end{aligned}$$

- In altre parole, dato il sistema

$$\dot{x} \;=\; F(t)x(t)$$

il valore minimo di un indice di comportamento quadratico del tipo

$$J \;=\; x^T(t_f)\, S_f\, x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)H(t)x(t)\, dt$$

vale $$J(x_0, t_0) \;=\; x_0^T\, S(t_0)\, x_0$$

essendo S(t) la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati

$$\dot{S} + F^T S + SF + H = 0 \qquad\qquad S(t_f) = S_f$$

(che risulta essere del tipo di Lyapunov).

CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Controllo ottimo
Parte 3 – Controllo ottimo TI

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

Controllo ottimo LQ – tempo infinito

- Sia dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

- Il sistema [la coppia (A, B)] si dice *stabilizzabile* se il sottospazio di instabilità è contenuto nel sottospazio di raggiungibilità. Segue che:
  - Ogni sistema asintoticamente stabile è stabilizzabile
  - Ogni sistema completamente raggiungibile è stabilizzabile

- Il sistema [la coppia (A, C)] si dice *rivelabile* se il sottospazio di non osservabilità è contenuto nel sottospazio di stabilità. Segue che
  - Ogni sistema asintoticamente stabile è rivelabile
  - Ogni sistema completamente ricostruibile è rivelabile

Controllo ottimo LQ – tempo infinito

- Nelle discussioni fatte sinora, il progetto del controllo ottimo prevedeva che l'istante finale t_f fosse
  - assegnato
  - finito: $t_f < \infty$.

  $\longrightarrow$ Controllo ottimo LQ – tempo finito

- Questo fa sì che l'evoluzione del sistema deve avvenire nel periodo temporale $t_0 - t_f$ ed è la motivazione principale dei fatti che:
  - le matrici che compaiono nella definizione della legge di controllo sono tempo varianti (dipendono dal tempo)

$$u(t) \;=\; -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t) \;=\; K(t)x(t)$$

  - La matrice *S(t)* è la soluzione della equazione *differenziale* di Riccati

$$\dot{S} + SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0, \qquad S(t_f) = S_f$$

che può non essere di semplice soluzione.

Controllo ottimo LQ – tempo infinito

- Sia dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

- Con l'indice di comportamento

$$J = x^T(t_f)\, S_f\, x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\; dt$$

$$S_f = S_f^T \geq 0 \qquad Q(t) = Q(t)^T \geq 0 \qquad R(t) = R(t)^T > 0$$

N.B. si potrebbe anche considerare l'indice di comportamento

$$\begin{aligned} J &= x^T(t_f)\, S_f\, x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t)Q(t)y(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\; dt \\ &= x^T(t_f)\, S_f\, x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)C^TQ(t)Cx(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\; dt \end{aligned}$$

Controllo ottimo LQ – tempo infinito

- Se la coppia *(A, B)* è stabilizzabile e la coppia *(A, C)* rivelabile, allora (*soluzione a regime*):

  - La soluzione *S(t)* dell'equazione matriciale differenziale di Riccati converge, per $t_f \to \infty$ e per qualunque condizione al contorno S_f, alla matrice costante S_∞ soluzione della equazione

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$$

$$(SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + C^T QC = 0)$$

    detta *Equazione Algebrica di Riccati (ARE)*

  - L'ARE ammette come unica soluzione semidefinita positiva la matrice S_∞. Se la coppia *(A, C)* è completamente ricostruibile, la matrice S_f è definita positiva.

  - La legge di retroazione

$$u(t) = -R^{-1}B^T S_\infty x(t)$$

    stabilizza asintoticamente il sistema e minimizza l'indice di comportamento $J(\infty)$ per qualunque S_f (≥ 0).

Controllo ottimo LQ – tempo infinito

- Dato il sistema (1), il *problema di regolazione LQ a tempo infinito* consiste nel determinare la legge di controllo ottima in retroazione che rende minimo l'indice di comportamento

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [y^T(t)Q(t)y(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\, dt$$

$$Q(t) = Q(t)^T > 0 \qquad R(t) = R(t)^T > 0$$

- Per quanto visto, la legge di controllo ottimo è data da

$$\boxed{u(t) = Kx(t) \qquad K = -R^{-1}B^T S}$$

con S matrice simmetrica, unica soluzione semidefinita positiva *dell'equazione (matriciale) algebrica di Riccati (ARE – Algebraic Riccati Equation)*

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + C^T QC = 0$$

- Il corrispondente valore dell'indice di comportamento è

$$J = x_0^T\, S\, x_0$$

Controllo ottimo LQ – tempo infinito

- Dato che la matrice S risulta simmetrica, l'ARE

$$SA + A^T S - SBR^{-1} B^T S + C^T QC = 0$$

dà luogo a *n(n+1)/2* equazioni algebriche scalari, ovviamente in genere di più facile soluzione rispetto al caso delle equazione di Riccati differenziale (caso del controllo LQ tempo finito).

CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

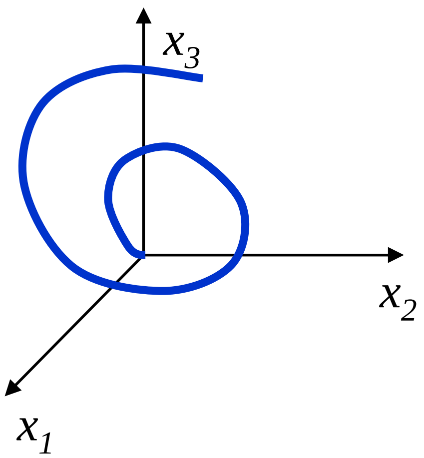
Controllo ottimo
Parte 4 – Altri Schemi

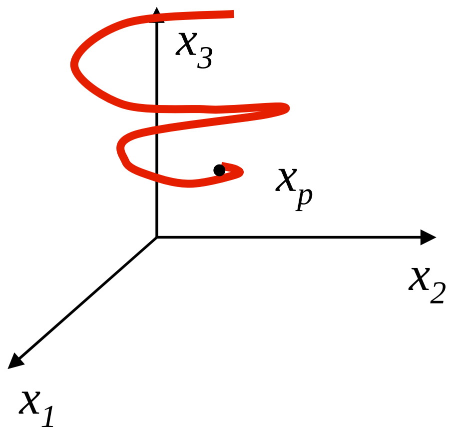
Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- I casi esaminati sinora di controllo ottimo LQ consideravano implicitamente come valori di riferimento "ottimi" l'origine dello spazio degli stati e l'origine dello spazio degli ingressi *($x = 0$; $u = 0$).*

- In generale, può essere assegnato come valore di riferimento per lo stato (e per l'ingresso) un valore x_p (u_p) diverso da zero.





- I casi esaminati sinora di controllo ottimo LQ consideravano implicitamente come valori di riferimento "ottimi" l'origine dello spazio degli stati e l'origine dello spazio degli ingressi *($x = 0$; $u = 0$).*

- In generale, può essere assegnato come valore di riferimento per lo stato (e per l'ingresso) un valore x_p (u_p) diverso da zero.

- Sia dato il seguente sistema, con *(A, B)* stabilizzabile e *(A, C)* rivelabile

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad & x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \qquad u \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \\
y(t) &= Cx(t) & y \in \mathbb{R}^{m\times 1},
\end{aligned}
$$

- Si scelga una coppia di vettori u_p, y_p tali che

$\boxed{\begin{array}{l} x_p = \text{set point} \\ \rightarrow x \text{ costante} \\ \rightarrow \text{vel} = 0! \end{array}}$

$$
\begin{aligned}
0 &= Ax_p + Bu_p, \\
y_p &= Cx_p
\end{aligned}
$$

N.B. Se $x_p \neq 0$, allora $u_p \neq 0$!

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- Il problema di regolazione ottima con set point diversi dalle origini consiste nel cercare la legge di retroazione *u(t) = u[x(t)]* ottima rispetto all'indice di comportamento

$$J = \int_0^\infty \{[y(t) - y_p]^T Q [y(t) - y_p] + [u(t) - u_p]^T R [u(t) - u_p]\} \, dt$$

$$Q = Q^T > 0, \quad Q \in \mathbb{R}^{m\times m}, \qquad R = R^T > 0, \quad R \in \mathbb{R}^{r\times r}$$

→ *Penalizzazione di y(t) e u(t) dai valori di riferimento y_p e u_p!*

- Si pone

$$x_s(t) = x(t) - x_p, \qquad y_s(t) = y(t) - y_p, \qquad u_s(t) = u(t) - u_p,$$

→
$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A x_s(t) + B u_s(t) \\ y_s(t) &= C x_s(t) \end{aligned}$$

→
$$J = \int_0^\infty [y_s^T \, Q \, y_s \; + \; u_s^T \, R \, u_s] \, dt$$

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- La soluzione del problema è dunque data da

$$u_s(t) = K\, x_s(t), \qquad K = -R^{-1}B^T S$$

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + C^T QC = 0, \qquad S \geq 0$$

- Da $u_s(t) = u(t) - u_p,$

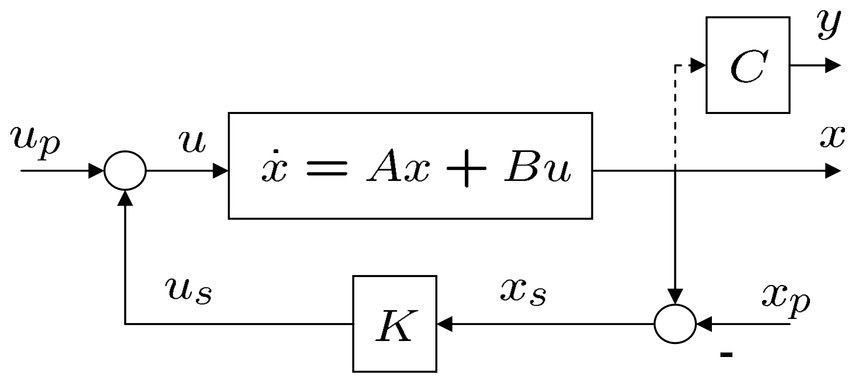
$$\rightarrow \quad u(t) = u_s(t) + u_p = Kx_s(t) + u_p = K[x(t) - x_p] + u_p$$

$$= Kx(t) + u_{ps}, \qquad u_{ps} = u_p - Kx_p$$

$$\rightarrow \quad \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + \underline{Bu_{ps}}$$

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- Da $\dot{x}(t) \;=\; (A+BK)x(t) + Bu_{ps}$ si ottiene lo schema a blocchi



- Siccome il sistema risulta asintoticamente stabile, a regime sarà $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0$

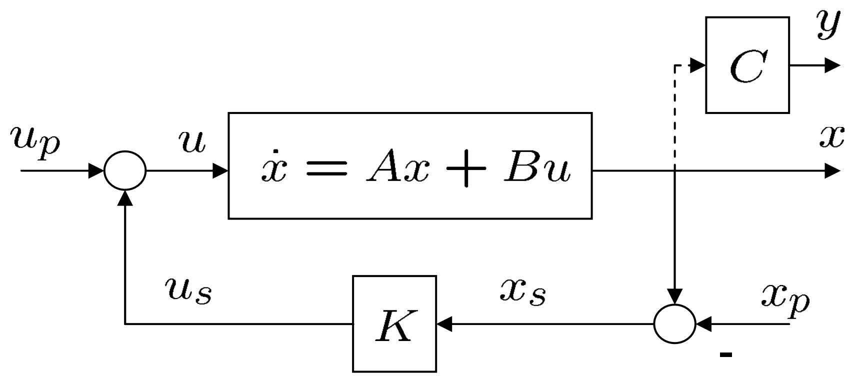
$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x(t) &= -(A+BK)^{-1}Bu_{ps} = -(A+BK)^{-1}(Bu_p - BKx_p) \\
&= (A+BK)^{-1}(A+BK)x_p \;=\; x_p
\end{aligned}
$$

$0 = Ax_p + Bu_p \;\rightarrow\; Bu_p = -Ax_p$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= y_p \\
\lim_{t\to\infty} u(t) &= u_p
\end{aligned}
$$

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

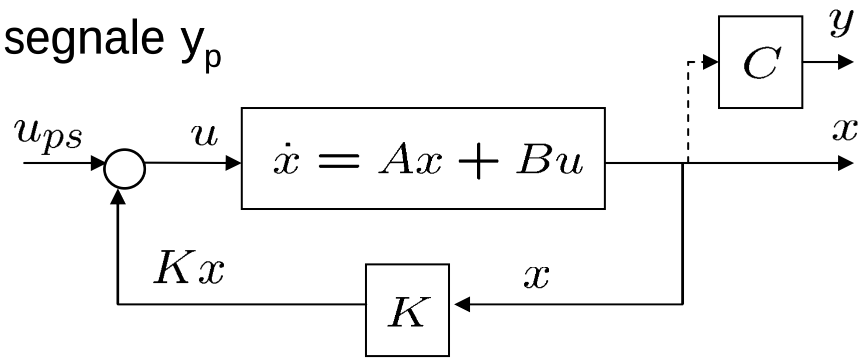
- Da $\dot{x}(t) = (A+BK)x(t) + Bu_{ps}$ si ottiene lo schema a blocchi



- In generale, non è dato lo stato x_p, ma solo il vettore y_p. Conviene quindi calcolare il segnale di ingresso u(t) da

$$u(t) = Kx(t) + u_{ps}$$

dove si deve definire u_{ps} sulla base del segnale y_p



- Occorre verificare se è possibile determinare il vettore u_{ps} corrispondente ad un dato y_p.

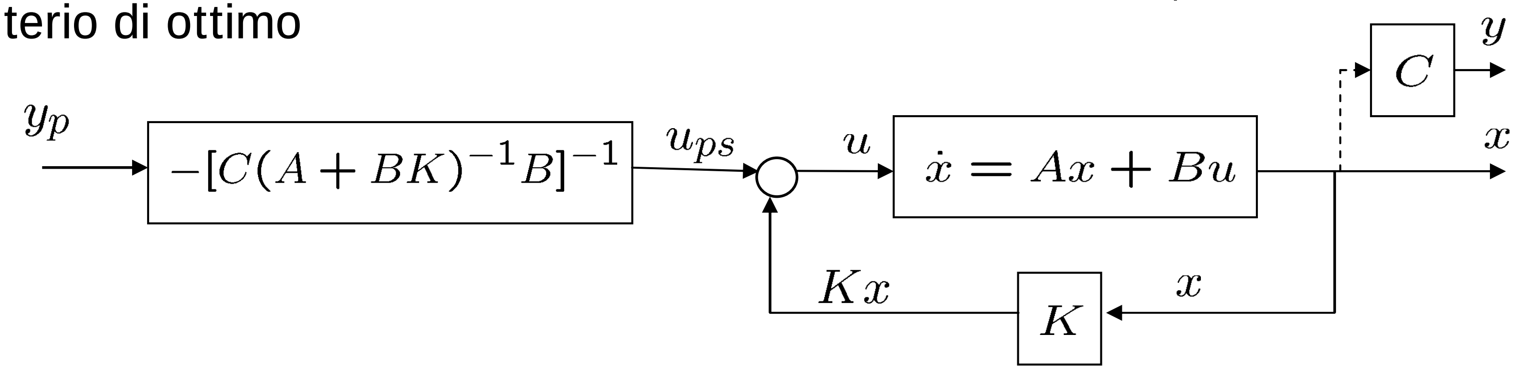
$$
\begin{aligned}
0 &= Ax_p + Bu_p, \\
y_p &= Cx_p
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
u(t) &= Kx(t) + u_{ps}, \\
u_{ps} &= u_p - Kx_p
\end{aligned}
$$

Vi sono tre casi possibili:

- ***m = r**. Vi sono tante uscite (m) quanti ingressi (r).*

  Da $(A+BK)x_p + Bu_{ps} = 0 \longrightarrow u_{ps} = -[C(A+BK)^{-1}B]^{-1}y_p$

  In questo caso, il sistema si dice anche *servomeccanismo*, e il vettore delle variabili controllate *y* insegue il valore di riferimento costante y_p secondo un dato criterio di ottimo



- ***m > r***. *Vi sono più uscite (m) di ingressi (r).*

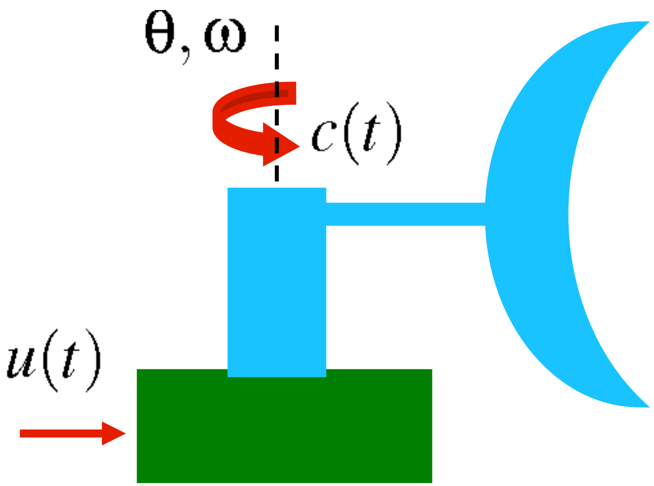
  E' possibile determinare u_{ps} solo per particolari valori del vettore y_p, in generale quindi non esiste soluzione.

- ***m < r***. *Vi sono più ingressi (r) che uscite (m).*

  Possono esistere più vettori u_{ps} corrispondenti ad un dato vettore y_p. In questo caso, è opportuno aggiungere componenti al vettore y(t) (far crescere m) ovvero eliminare componenti dal vettore di controllo (ridurre r)

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- ***Esempio:*** *Controllo della posizione angolare di un'antenna (rif. onda quadra)*



$$I = 1, \quad k = 1, \quad b = 2$$

$$\begin{aligned} I\,\ddot{\theta}(t) + b\,\dot{\theta}(t) &= c(t) \\ c(t) &= k\,u(t) \end{aligned}$$

$$\theta \to \theta_d$$

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{I}x_2 + \frac{k}{I}u \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} x_{1s} &= x_1 - x_{1p} \\ x_{2s} &= x_2 \qquad (\dot{x}_{1p} = 0) \\ y_p &= x_{1p} \\ u_p &= 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad u_s = u$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1s} \\ \dot{x}_{2s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_s &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

- ***Esempio:*** *Controllo della posizione angolare di un'antenna*

Si definisce quindi:

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty x_{1s}^2 + R\,u^2 \;\; dt \\
&= \int_0^\infty [x_{1s},\ x_{2s}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} + R\,u^2 \;\; dt, \qquad R = 1
\end{aligned}
$$

Sarà allora

$$
\begin{aligned}
u(t) &= K\,x_s(t) \\
&= -R^{-1} B^T S\, x_s(t)
\end{aligned}
$$

Con S soluzione dell'ARE

$$
SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + C^T QC \;=\; 0, \qquad S \geq 0
$$

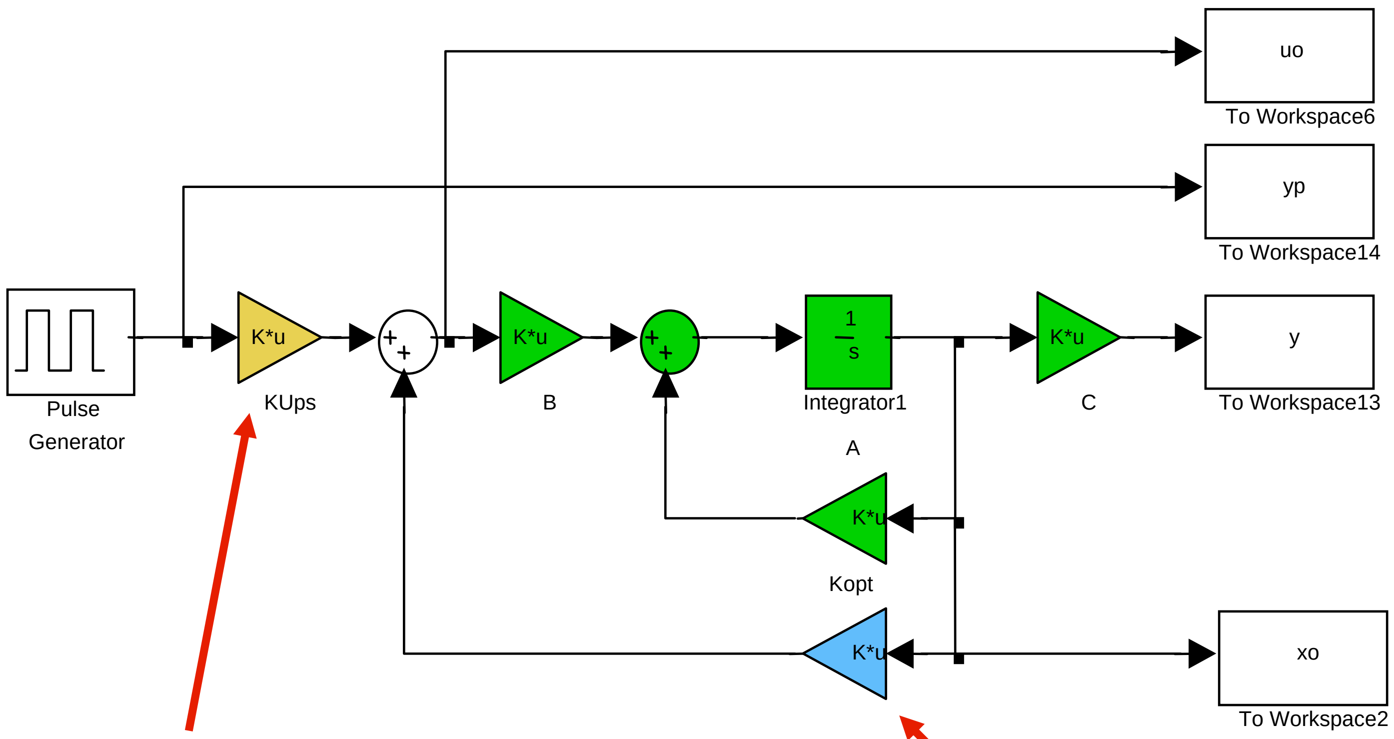
$$
\begin{aligned}
C^T QC &= [1,\ 0]\ 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

In MATLAB: *[S,L,K] = care(A,B,Q,R);*

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- ***Esempio:*** *Controllo della posizione angolare di un'antenna*

[S,L,K] = care(A,B,Q,R); → $$S = \begin{bmatrix} 2.4495 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.4495 \end{bmatrix}$$



$$u_{ps} = -[C(A+BK)^{-1}B]^{-1}y_p$$

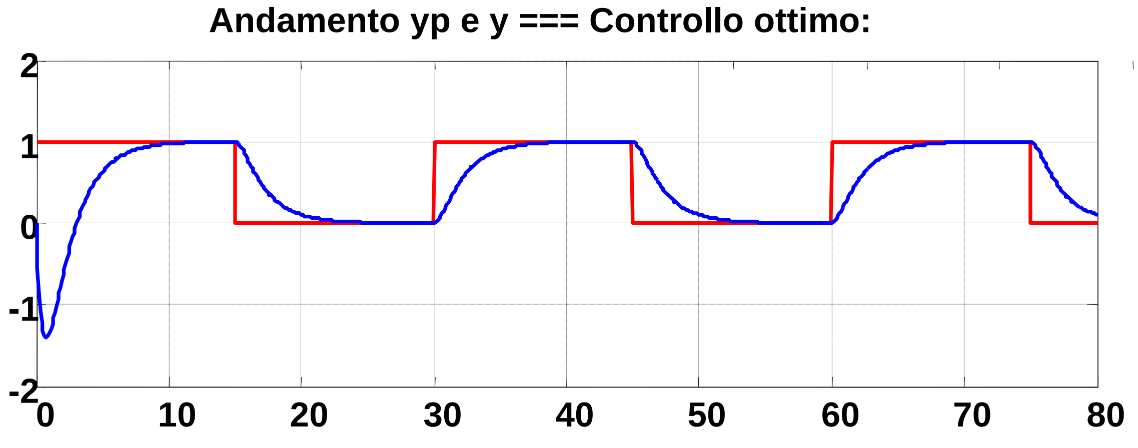
$$K = -\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.4495 \end{bmatrix}$$

Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- ***Esempio:*** *Controllo della posizione angolare di un'antenna*

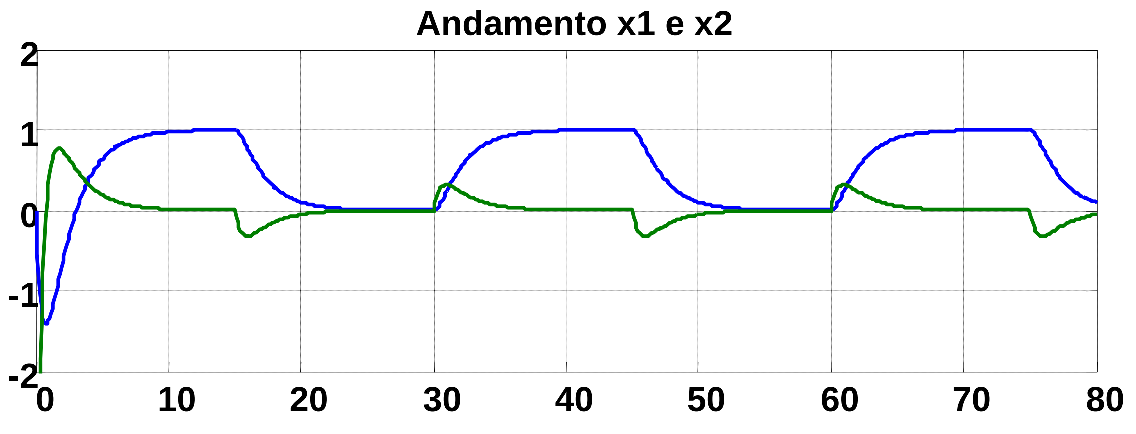
[S,L,K] = care(A,B,Q,R); →

$$S = \begin{bmatrix} 2.4495 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.4495 \end{bmatrix} \qquad K = -\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.4495 \end{bmatrix}$$



λ_1 = -0.51764,

λ_2 = -1.9319

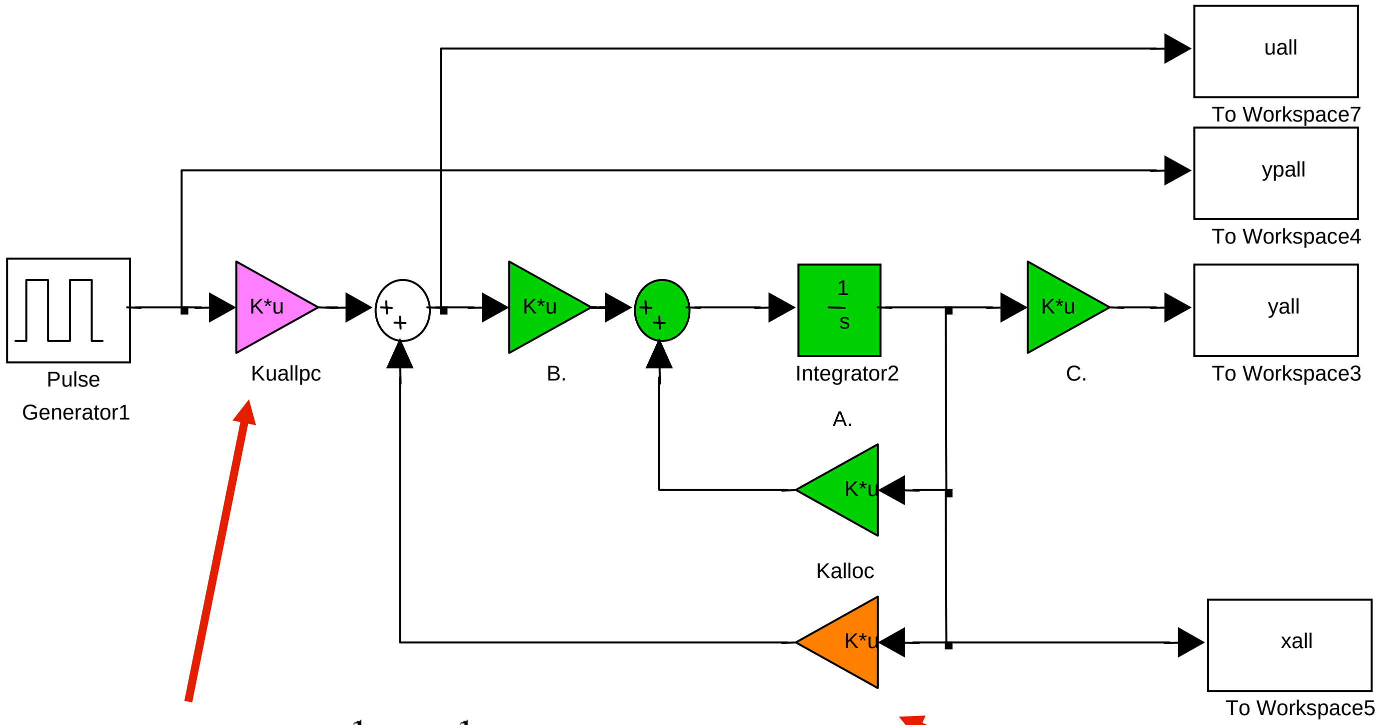


Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- ***Esempio:*** *Controllo della posizione angolare di un'antenna*

Si poteva procedere anche con allocazione degli autovalori
NB: con indice di comportamento peggiore!

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3 \quad \rightarrow \quad K_a = \begin{bmatrix} -9 & -4 \end{bmatrix}$$



$$u_{ps} = -[C(A+BK_a)^{-1}B]^{-1}y_p$$

$$K_a = \begin{bmatrix} -9 & -4 \end{bmatrix}$$

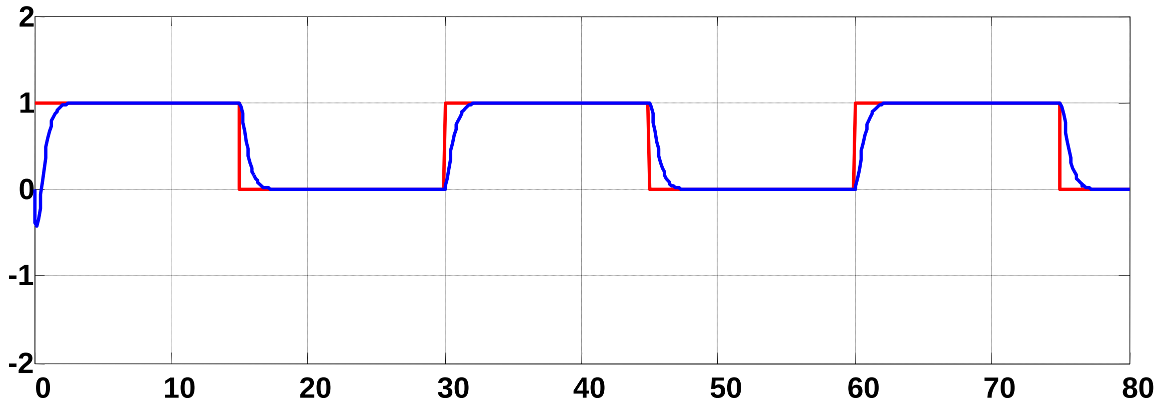
Controllo ottimo LQ – set point non nullo

- ***Esempio:*** *Controllo della posizione angolare di un'antenna*

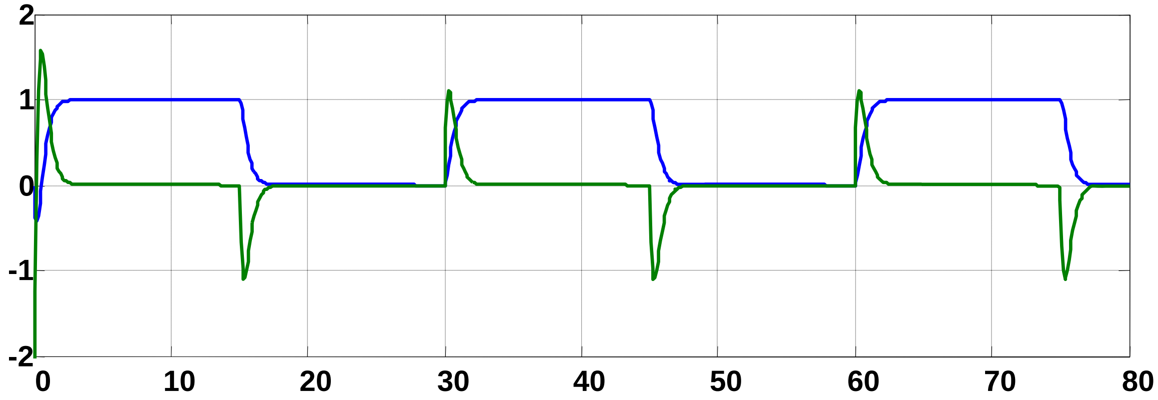
Si poteva procedere anche con allocazione degli autovalori

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3 \longrightarrow \boxed{K = [\ -9 \quad -4\ ]}$$

Andamento yp e y === Allocazione autovalori:



Andamento x1 e x2



Dati del problema

Equazioni del sistema:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)\ ,\ \ x(0) = x_a$$

con $x \in R^n$, $u \in R^p$, (A, B) stabilizzabile.

Indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\,x^T(k_b)\,S_b\,x(k_b) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_b-1}\left[x^T(k)\,Q\,x(k) + u^T(k)\,R\,u(k) + 2\,x^T(k)\,N\,u(k)\right]\ dt$$

con

$$S_b \geq 0\ ,\ \ R > 0\ ,\ \ \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$$

Anche in questo caso il problema può essere ad orizzonte infinito oppure ad orizzonte finito.

Soluzione del problema

Si scrive la funzione Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}\left(x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u\right) + \lambda^T(k+1)(Ax+Bu)$$

in cui $\lambda \in R^n$ è il vettore del co-stato (o delle variabili aggiunte).

Le equazioni che risolvono il problema si ottengono affiancando a quelle del sistema di partenza quelle del sistema aggiunto:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T\lambda(k+1) + Qx(k) + Nu(k)$$

Questa ultima equazione può essere riscritta “in avanti”:

$$\lambda(k+1) = A^{-T}\lambda(k) - A^{-T}Qx(k) - A^{-T}Nu(k)$$

Soluzione del problema

Affinché la traiettoria seguita dal sistema con ingresso u rappresenti l'ottimo rispetto all'indice di comportamento, devono essere soddisfatte le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = R\,u(k) + N^T x(k) + B^T \lambda(k+1) = 0$$

Si ottiene quindi il sistema dinamico "ampliato":

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -A^{-T}N \end{bmatrix} u(k)$$

$$0 = \begin{bmatrix} -BA^{-T}Q + N^T & B^T A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} + \left[R - BA^{-T}N\right]\,u(k)$$

Soluzione del problema

Si noti che nel sistema dinamico ampliato occorre trovare una legge di controllo che mantenga nulla l'uscita. Se *R>0* si può ricavare *u(k)* dalla condizione di stazionarietà:

$$u(k) = (R - B^T A^{-T} N)^{-1} [(B^T A^{-T} Q + N^T)\, x(k) - B^T A^{-T} \lambda(k)]$$

Sostituendo l'espressione di *u(k)* nelle equazioni del sistema ampliato si ottiene il <u>sistema hamiltoniano</u> alle differenze di ordine *2n*.

Si può dimostrare che esso presenta autovalori a coppie del tipo

$$\lambda_i \ , \ 1/\lambda_i \ , \quad i = 1, \ldots, n$$

Soluzione del problema

Nel caso tempo discreto l'equazione algebrica di Riccati che risolve il problema ad orizzonte infinito è:

$$S = A^T S A - (A^T S B + N)(R + B^T S B)^{-1}(B^T S A + N^T) + Q$$

Analogamente al caso tempo continuo, il costo è dato dall'espressione:

$$J = \frac{1}{2}\, x_a^T S\, x_a$$

In Matlab si usa l'istruzione *[S, L, K] = dare(A,B,Q,R,N)* che fornisce la matrice di retroazione dello stato *K* e la matrice del costo *S*. Contrariamente all'istruzione *care*, che richiede la non singolarità di *R*, la *dare* funziona anche con *R=0 , N=0*.

Soluzione del problema

L'equazione algebrica di Riccati per il caso tempo discreto - orizzonte infinito si risolve anche tramite la relazione ricorrente

$$S_0 = I_n$$
$$S_{i+1} = A^T S_i A - (A^T S_i B + N)(R + B^T S_i B)^+ (B^T S_i A + N^T) + Q$$

fino a convergenza (si noti la pseudoinversa).

Si ricava poi la matrice di retroazione stabilizzante con:

$$K = -(R + B^T S B)^+ (B^T S A + N^T)$$

CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Controllo ottimo
Parte 5 – Specifiche frequenziali

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

- ***Teorema di Parseval.***

  Per un segnale $u(t)$, $t \in R$, si può definire l'energia (normalizzata) come

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \quad \left(= \int_{0}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right)$$

Se esiste la trasformata di Fourier del segnale *u(t),* il calcolo dell'energia può essere anche effettuato nel dominio delle frequenze come:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega$$

Controllo ottimo con specifiche frequenziali

- Dato il sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \qquad u \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \\
y(t) &= Cx(t) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y \in \mathbb{R}^{m\times 1},
\end{aligned}
$$

La metodologia sinora seguita per il calcolo della legge di controllo ottima si basa sulla minimizzazione di un indice di comportamento

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) \;\; u^T(t)] \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

$$Q = Q^T \geq 0, \quad Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad R = R^T > 0, \quad R \in \mathbb{R}^{r\times r}$$

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$$

Controllo ottimo con specifiche frequenziali

- Dalla definizione dell'indice di comportamento, si può evidenziare che la "penalizzazione" dei segnali x(t) e u(t) è costante al variare delle frequenze: le matrici che compaiono in J sono costanti!

- Infatti, l'indice di comportamento può essere riscritto applicando il Teorema di Parseval nel modo seguente

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[X^*(j\omega) \quad U^*(j\omega) \right] \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(j\omega) \\ U(j\omega) \end{bmatrix} d\omega$$

In cui X(j ω) e U(j ω) sono le trasformate di Fourier di x(t) ed u(t).

Si vede che i "pesi" in J sono costanti al variare di ω.

- *In generale, è desiderabile invece potere assegnare specifiche di tipo frequenziale al sistema di controllo.*

Controllo ottimo con specifiche frequenziali

- Si vuole dunque definire un metodo per manipolare l'indice di comportamento J per rispettare eventuali specifiche frequenziali.

- Questo metodo di progetto è noto in letteratura con il nome di *frequency-shaping.*

- Si consideri l'indice di comportamento

$$J = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [X^*(j\omega) \;\; U^*(j\omega)] \begin{bmatrix} Q(j\omega) & 0 \\ 0 & R(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(j\omega) \\ U(j\omega) \end{bmatrix} d\omega$$

$$Q(j\omega) = Q^*(j\omega) \geq 0, \qquad R(j\omega) = R^*(j\omega) > 0,$$

- E' possibile assegnare specifiche fisicamente interpretabili se

$$\begin{aligned} Q(j\omega) &= \mathrm{diag}[q_1(\omega^2), \ldots, q_n(\omega^2)] \\ R(j\omega) &= \mathrm{diag}[r_1(\omega^2), \ldots, r_r(\omega^2)] \end{aligned}$$

- In questo caso, è possibile riscrivere le matrici Q ed R come

$$Q(j\omega) = P_Q^*(j\omega)P_Q(j\omega), \qquad R(j\omega) = P_R^*(j\omega)P_R(j\omega)$$

- Dove P_R ha dimensione r x r, mentre P_Q ha dimensione σ x n essendo in generale rank(Q) = $\sigma \leq$ n.
- Definendo i due nuovi vettori

$$X_P(j\omega) = P_Q(j\omega)X(j\omega), \qquad U_P(j\omega) = P_R(j\omega)U(j\omega)$$

- L'indice di comportamento può essere riscritto come

$$J = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [X_P^*(j\omega) \;\; U_P^*(j\omega)] \begin{bmatrix} X_P(j\omega) \\ U_P(j\omega) \end{bmatrix} d\omega$$

$$\longrightarrow \qquad J = \int_0^{\infty} [x_P^T(t) \;\; u_P^T(t)] \begin{bmatrix} x_P(t) \\ u_P(t) \end{bmatrix} dt$$

- Abbiamo dunque definito un problema di ottimo con specifiche frequenziali come un “normale” problema di ottimo ad orizzonte infinito per un sistema definito dalle variabili $x_P(t)$ e $u_P(t)$.

- Il problema è ora di definire il nuovo sistema (funzione delle specifiche frequenziali tramite le matrici P_Q e P_R).

- Se gli elementi delle matrici $P_Q(j\,\omega)$ e $P_R(j\,\omega)$ sono funzioni razionali proprie di $j\,\omega$, queste matrici possono essere considerate come le matrici di risposta armonica di due sistemi dinamici lineari stazionari, per i quali è possibile definire una realizzazione nello spazio degli stati

$$X_P(j\omega) = P_Q(j\omega)X(j\omega) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{z}_Q &= A_Q z_Q + B_Q x & \quad z_Q \;\; \eta \times 1 \\ x_P &= C_Q z_Q + D_Q x & \quad x_P \;\; \sigma \times 1 \end{aligned}$$

$$U_P(j\omega) = P_R(j\omega)U(j\omega) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{z}_R &= A_R z_R + B_R u & \quad z_R \;\; \nu \times 1 \\ u_P &= C_R z_R + D_R u & \quad u_P \;\; r \times 1 \end{aligned}$$

- Si consideri ora il sistema ampliato comprendente i tre sistemi dinamici con variabili di stato x(t), $z_Q(t)$ e $z_R(t)$.

$$\dot{x}_A(t) = A_A\, x_A(t) + B_A u(t)$$

$$x_A(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z_Q(t) \\ z_R(t) \end{bmatrix}, \qquad A_A = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ B_Q & A_Q & 0 \\ 0 & 0 & A_R \end{bmatrix}, \qquad B_A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ B_R \end{bmatrix}$$

- A questo punto si deve riscrivere l'indice di comportamento

$$J = \int_0^\infty [x_P^T(t) \;\; u_P^T(t)] \begin{bmatrix} x_P(t) \\ u_P(t) \end{bmatrix} dt$$

utilizzando il vettore $x_A(t)$ e l'ingresso u(t).

Controllo ottimo con specifiche frequenziali

- Si può facilmente ricavare che

$$
\begin{aligned}
x_P^T x_P &= (z_Q^T C_Q^T + x^T D_Q^T)(C_Q z_Q + D_Q x) \\
&= z_Q^T C_Q^T C_Q z_Q + z_Q^T C_Q^T D_Q x + x^T D_Q^T C_Q z_Q + x^T D_Q^T D_Q x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_P^T u_P &= (z_R^T C_R^T + u^T D_R^T)(C_R z_R + D_R u) \\
&= z_R^T C_R^T C_R z_R + z_R^T C_R^T D_R u + u^T D_R^T C_R z_R + u^T D_R^T D_R u
\end{aligned}
$$

$$
J = \int_0^\infty [x_A^T(t) \;\; u^T(t)] \begin{bmatrix} Q_A & N \\ N^T & R_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \, dt
$$

$$
Q_A = \begin{bmatrix} D_Q^T D_Q & D_Q^T C_Q & 0 \\ C_Q^T D_Q & C_Q^T C_Q & 0 \\ 0 & 0 & C_R^T C_R \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_R^T D_R \end{bmatrix}, \qquad R_A = D_R^T D_R
$$

Controllo ottimo con specifiche frequenziali

- Ricapitolando:

$$\dot{x}_A(t) \;=\; A_A\, x_A(t) \;+\; B_A u(t)$$

$$x_A(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z_Q(t) \\ z_R(t) \end{bmatrix}, \qquad A_A = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ B_Q & A_Q & 0 \\ 0 & 0 & A_R \end{bmatrix}, \qquad B_A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ B_R \end{bmatrix}$$

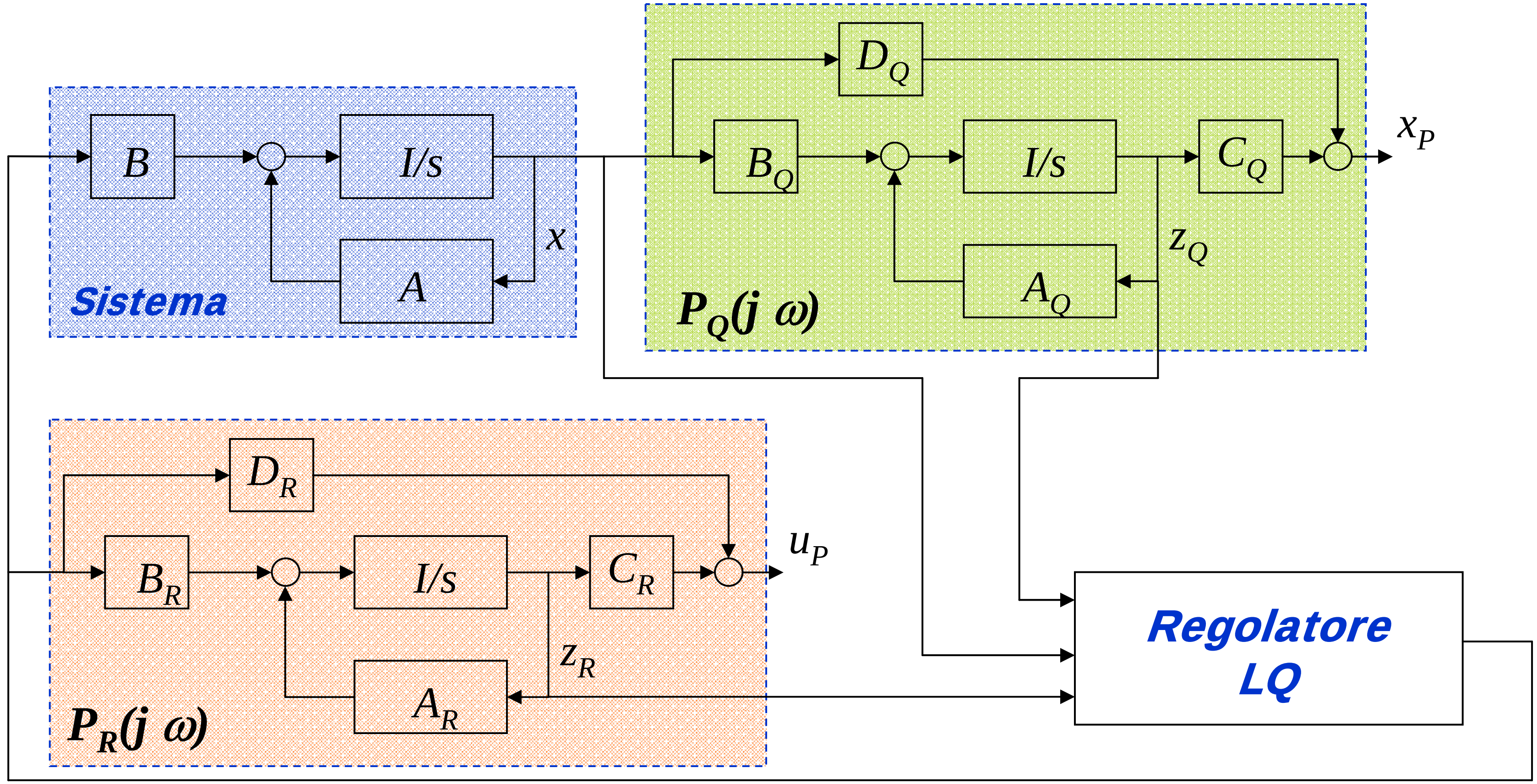
$$J = \int_0^{\infty} [x_A^T(t) \;\; u^T(t)] \begin{bmatrix} Q_A & N \\ N^T & R_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

$$\longrightarrow \qquad u(t) \;=\; K\, x_A(t), \qquad K = -R_A^{-1} B_A^T S$$

$$S A_A + A_A^T S - S B_A R_A^{-1} B_A^T S + Q_A \;=\; 0, \qquad S \geq 0$$

Controllo ottimo con specifiche frequenziali

- Complessivamente, lo schema di controllo che si ottiene è il seguente



E' evidente che la soluzione del problema di regolazione *frequency-shaped* consiste in una legge di retroazione dinamica delle variabili di stato!

CONTROLLI AUTOMATICI LS

Introduzione al controllo ottimo
FINE

Prof. Claudio Melchiorri

DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093034

e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri