CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Osservatore di ordine ridotto

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri

Osservatore di ordine ridotto

- **Problema:**

  Dato un sistema dinamico tempo continuo [tempo discreto]

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t)\end{array} \qquad \left[\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k)+Du(k)\end{array}\right]$$

  di ordine n, con y di dimensione q, C di rango massimo (rank(C)=q) e (A,C) completamente osservabile, si stimi la dinamica dello stato tramite un sistema dinamico di ordine (n-q).

- **Soluzione:**

  Si sfruttano le informazioni disponibili in uscita per le prime q componenti dello stato e si stima soltanto le restanti (n-q) componenti.

  Si opera la trasformazione omogenea nello spazio degli stati T=[T1 T2] con T1=C^+ (pseudoinversa destra di C) e ima(T2)=ker(C), da cui si ottiene il sistema equivalente (A′,B′,C′,D′) in cui, in particolare, C′=[I_q $0_{(n-q)}$].

$$A' = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22}\end{array}\right],\ B' = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} B'_1 \\ B'_2\end{array}\right],\ C' = CT = [I_q \ \ 0_{n-q}],\ D' = D$$

Osservatore di ordine ridotto

Sistema equivalente

Indicando con z lo stato del sistema così ottenuto si ha:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} I_q & 0_{(n-q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + Du = z_1 + Du$$

Definendo $y_0 = y - D\,u = z_1$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \dot{y}_0 = A'_{11}z_1 + A'_{12}z_2 + B'_1 u = A'_{11}y_0 + A'_{12}z_2 + B'_1 u \\
\dot{z}_2 &= A'_{21}z_1 + A'_{22}z_2 + B'_2 u = \\
&= A'_{21}z_1 + A'_{22}z_2 + B'_2 u + L(-\dot{y}_0 + A'_{11}y_0 + A'_{12}z_2 + B'_1 u) = \\
&= A'_{21}y_0 + (A'_{22} + LA'_{12})z_2 + B'_2 u + L(-\dot{y}_0 + A'_{11}y_0 + B'_1 u)
\end{aligned}$$

con L matrice arbitraria di dimensione (n-q)xq (guadagno dell’osservatore).

Osservatore di ordine ridotto

Sintesi dell'osservatore

Si pone $w=z_2 + L\, y_0$ percui si ha:

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z}_2 + L\dot{y}_0 = \\
&= A'_{21} y_0 + (A'_{22} + LA'_{12}) z_2 + B'_2 u + L(A'_{11} y_0 + B'_1 u) = \\
&= (A'_{22} + LA'_{12}) w + [-(A'_{22} + LA'_{12})L + LA'_{11} + A'_{21}] y_0 + \\
&\quad + (B'_2 + LB'_1) u
\end{aligned}$$

Riscrivendo la relazione ottenuta in forma compatta [caso tempo discreto]:

$$\dot{w} = Nw + My_0 + Pu \qquad [w(k+1) = Nw(k) + My_0(k) + Pu(k)]$$

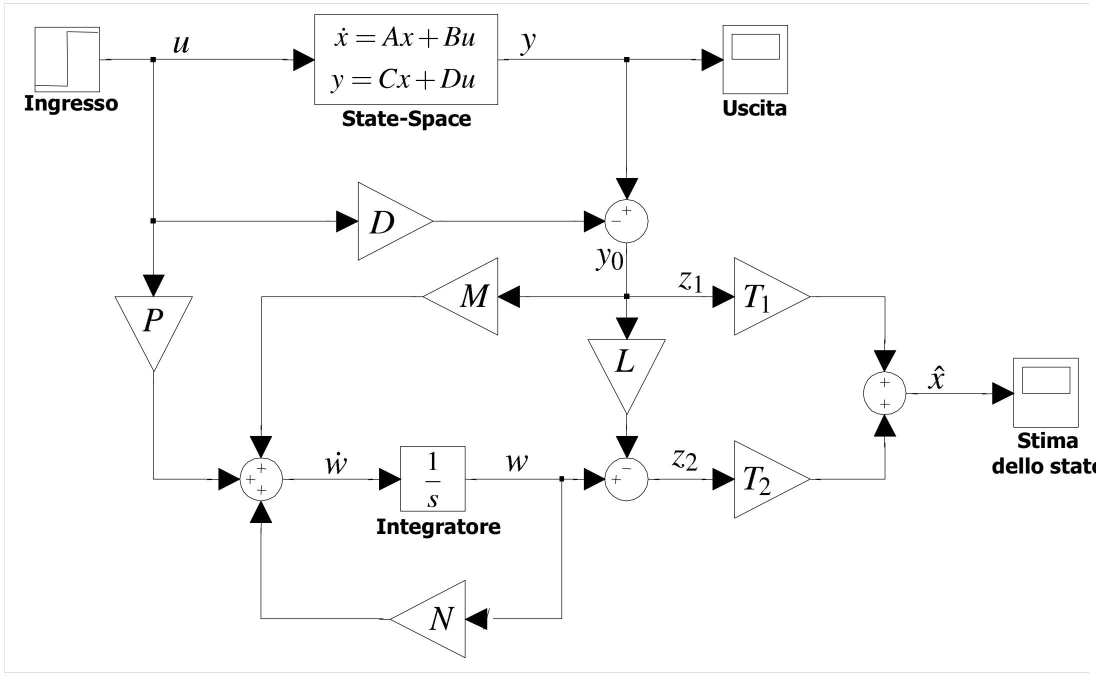
dove si è posto:

$$\begin{aligned}
P &= B'_2 + LB'_1 \\
M &= -(A'_{22} + LA'_{12})L + LA'_{11} + A'_{21} \\
N &= A'_{22} + LA'_{12}
\end{aligned}$$

Gli n-q autovalori dell'osservatore sono assegnabili arbitrariamente tramite una opportuna matrice L se la coppia (A'_{22}, A'_{12}) è complemente osservabile, condizione che è sempre verificata se (A,C) è completamente osservabile e se C è di rango q.

Struttura dell'osservatore

L'osservatore è un sistema di ordine n-q, che stima esclusivamente gli stati su di cui non è possibile avere informazioni tramite l'uscita. In questo modo si sfruttano al massimo la informazioni dirette (disponibili in uscita) e si stimano solo le grandezze strettamente necessarie.



Proprietà di separazione

I 2n-q autovalori del sistema che si ottiene attraverso una retroazione statica K dello stato stimato con l'osservatore di ordine ridotto, sono l'unione con ripetizione degli n autovalori di A + B K e degli n-q autovalori di $A'_{22} + L A'_{12}$.

Osservatore di ordine ridotto

- **Proprietà di separazione per l'osservatore di ordine ridotto (caso tempo continuo)**

Tramite la retroazione $u = K\tilde{x}$ e assumendo la funzione errore $e = \tilde{z}_2 - z_2$:

$$\dot{e} = \dot{\tilde{z}}_2 - \dot{z}_2 = \dot{w} - L\dot{z}_1 - \dot{z}_2 = Nw + Mz_1 + Pu - [L \;\; I_{(n-q)}]\dot{z}$$

Ponendo $R = [L \;\; I_{(n-q)}]$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Nw + Mz_1 + Pu - R(A'z + B'u) = \\ &= N(e + z_2 + Lz_1) + Mz_1 + Pu - R(A'z + B'u) \end{aligned}$$

Con le assunzioni fatte, valgono le seguenti proprietà:

$$P - RB' = 0$$

$$NR + M[I_q \;\; 0_{(n-q)}] - RA' = NR + MC' - RA' = 0$$

Il sistema dinamico in retroazione che si ottiene risulta quindi essere:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BKTS \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad S = [0 \;\; I_{(n-q)}]^T$$

CONTROLLI AUTOMATICI LS

FINE

Prof. Claudio Melchiorri
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093034
e-mail: claudio.melchiorri@unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/people/cmelchiorri