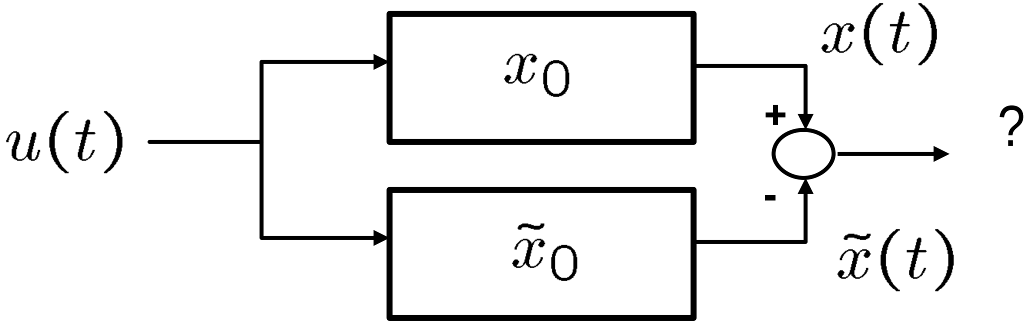
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Controlli Automatici L

Stabilità dei sistemi dinamici

Prof. Carlo Rossi
DEIS-Università di Bologna
Tel. 051 2093020
Email: crossi@deis.unibo.it
URL: www-lar.deis.unibo.it/~crossi

Stabilità di sistemi dinamici (stazionari)

Stabilità del movimento: Dato un sistema dinamico (a parametri e ingressi fissati) e data una traiettoria di riferimento $x(t),\ t \geq t_0$ (ovvero uno stato iniziale $x(t_0)$), l'obiettivo e' studiare l'andamento della traiettoria ottenuta perturbando lo stato iniziale rispetto alla traiettoria di riferimento.



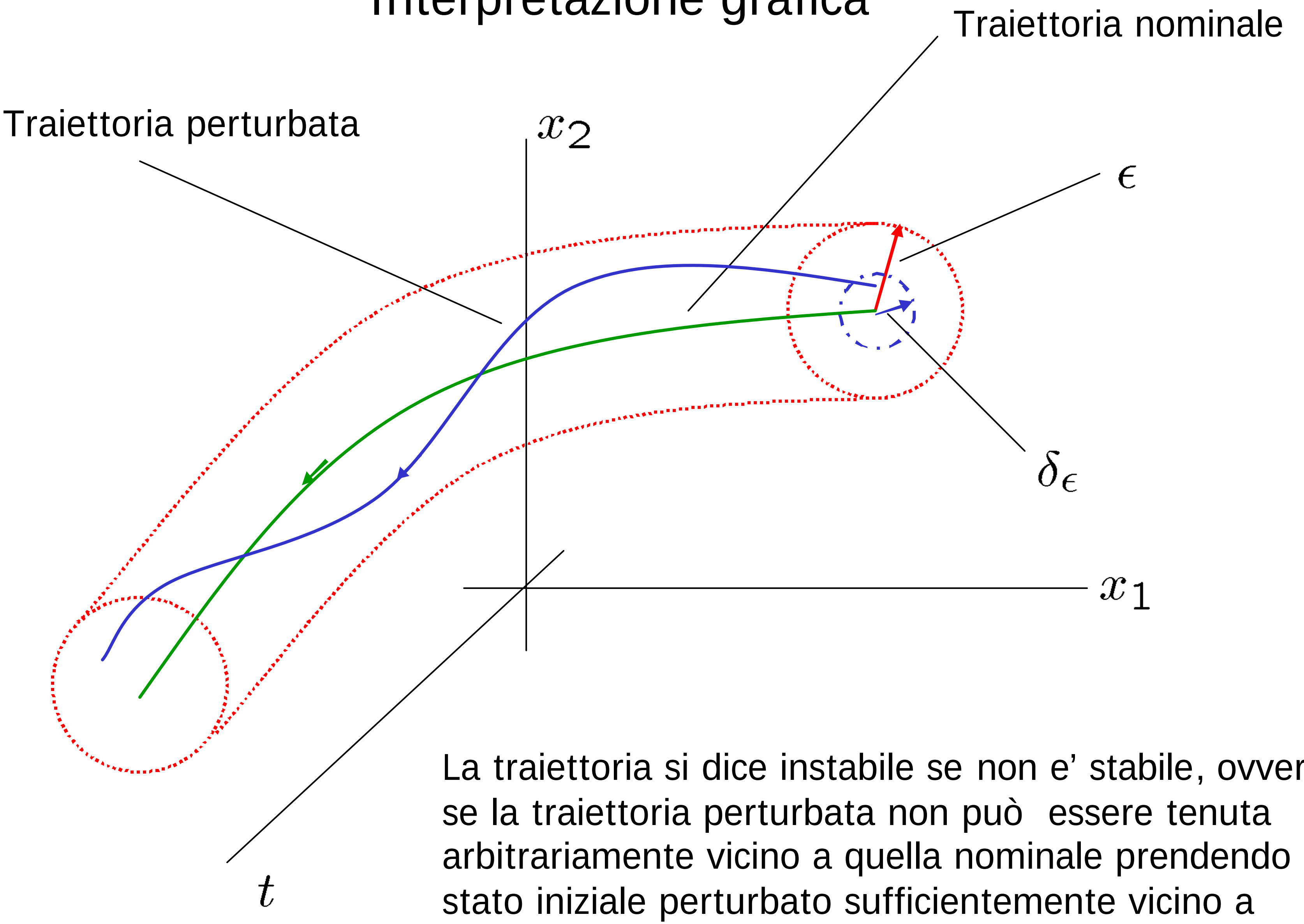
Definizione (stabilità): Un movimento $x(t)$ si dice stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni stato iniziale che soddisfa la relazione

$$||x_0 - \tilde{x}_0|| \leq \delta_\epsilon$$

risulti

$$||x(t) - \tilde{x}(t)|| \leq \epsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

Interpretazione grafica



La traiettoria si dice instabile se non e' stabile, ovvero se la traiettoria perturbata non può essere tenuta arbitrariamente vicino a quella nominale prendendo lo stato iniziale perturbato sufficientemente vicino a quello nominale.

Definizione (stabilità asintotica): una traiettoria $x(t)$ si dice asintoticamente stabile per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni stato iniziale $\tilde{x}_0$ che soddisfa la relazione

$$\|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta_\epsilon$$

risulti

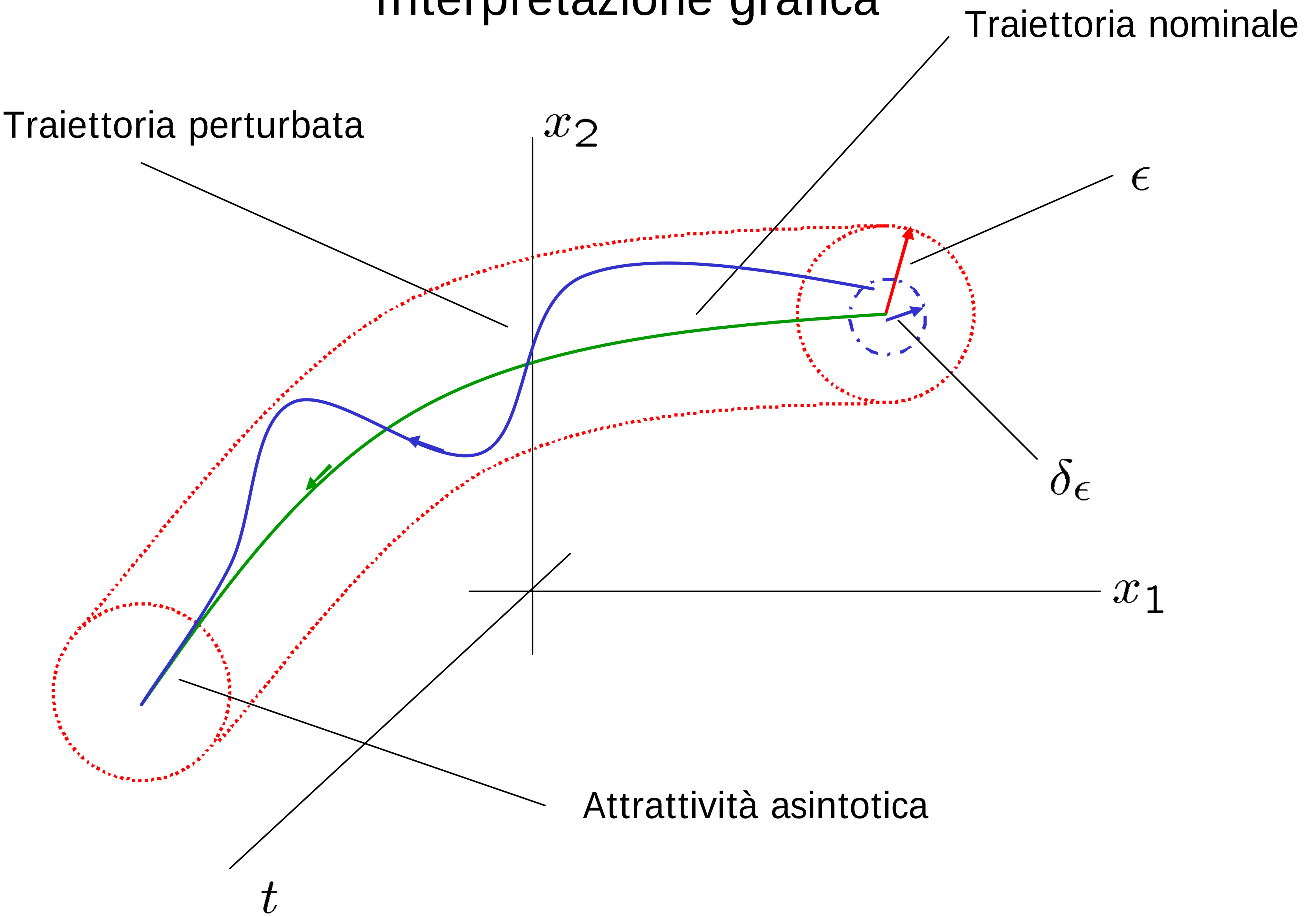
$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \epsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

e inoltre (attrattività asintotica)

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

➡ Stabilità asintotica = stabilità + attrattività asintotica

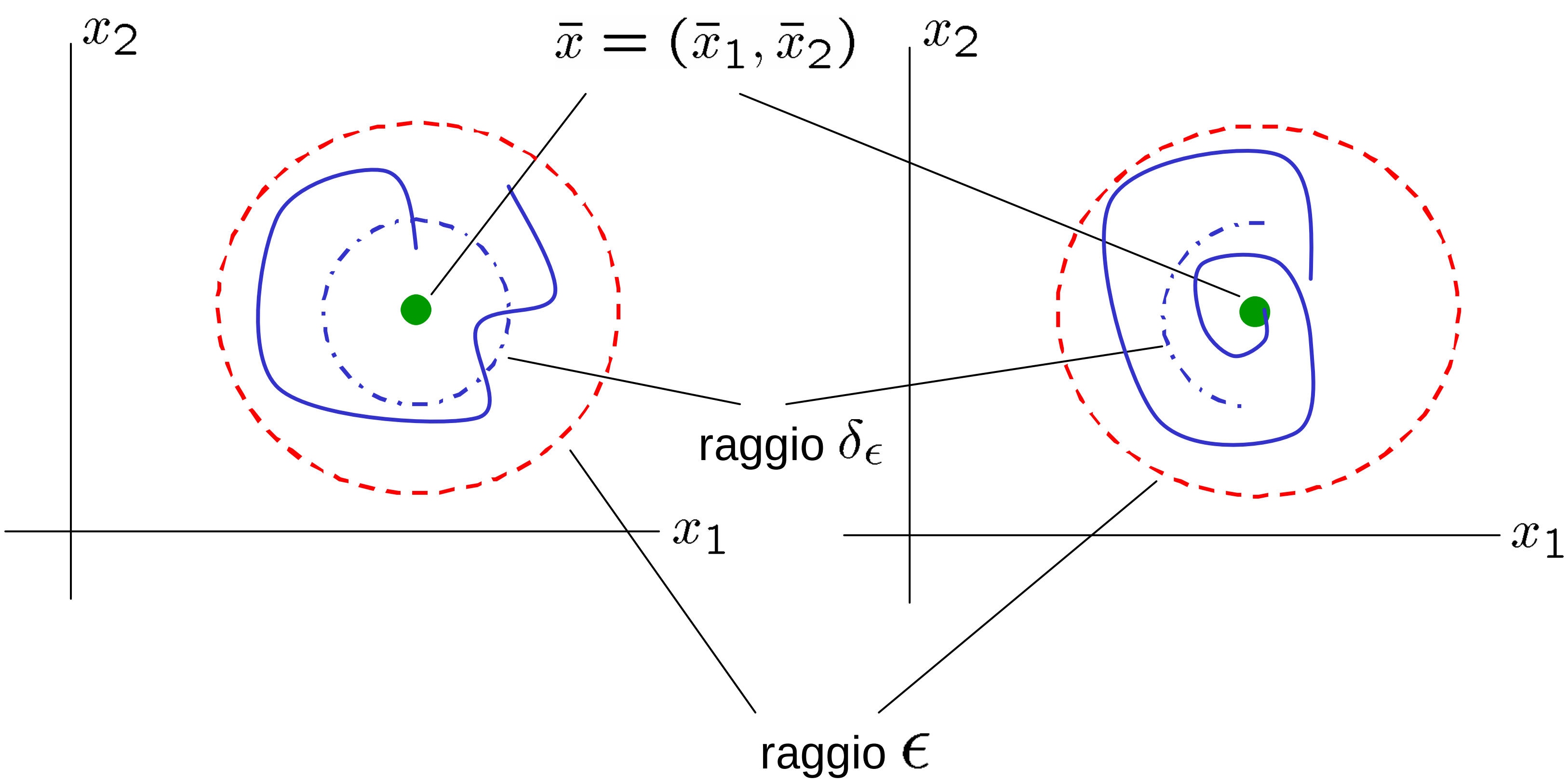
Interpretazione grafica



Stabilità di un punto di equilibrio

Essendo un punto di equilibrio una particolare traiettoria del sistema le precedenti definizioni si possono specializzare definendo la stabilità semplice e asintotica di un punto equilibrio

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$



Alcune considerazioni:

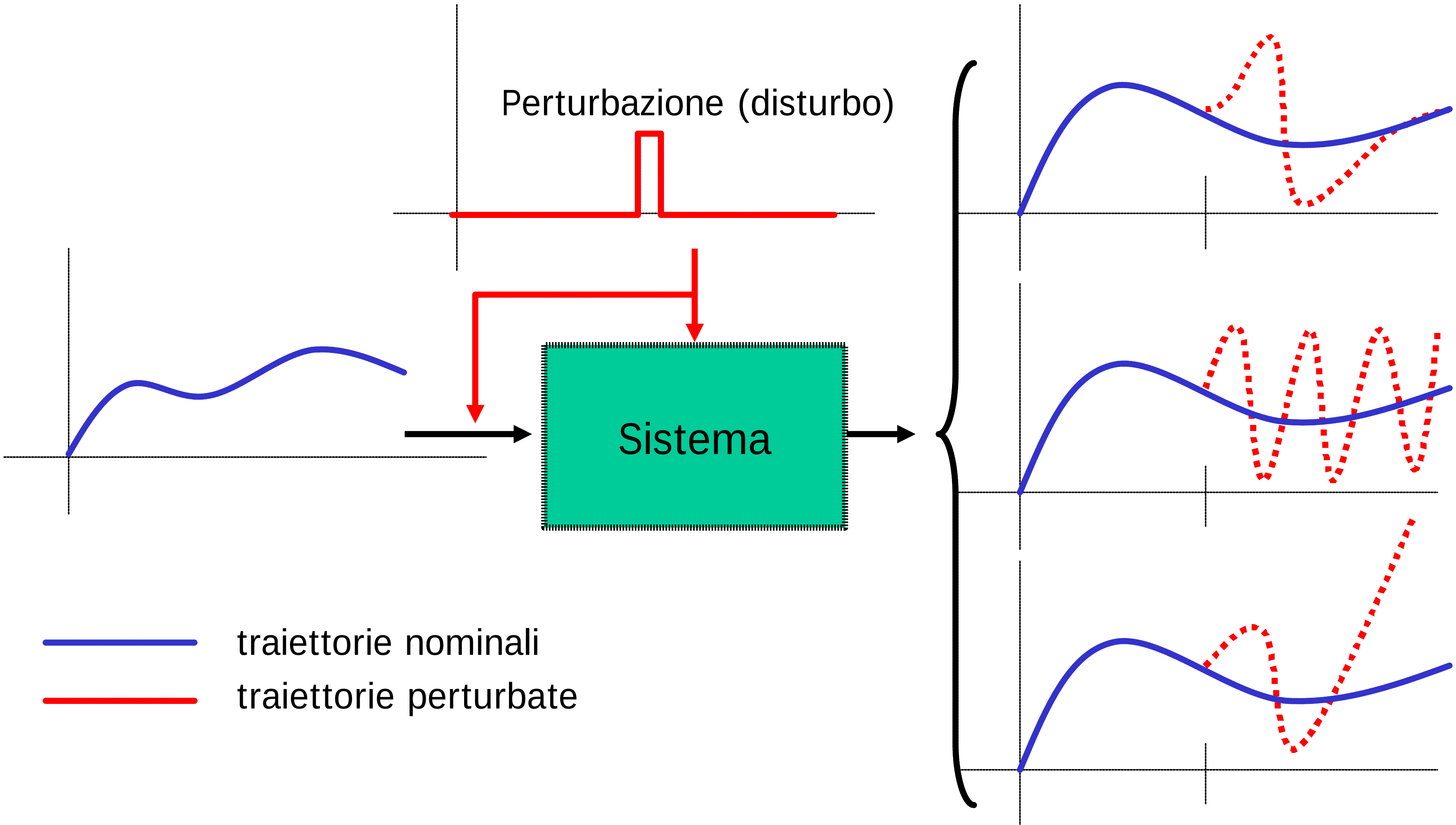
- In generale per i sistemi dinamici la proprietà di stabilità **non** e' associata al sistema ma alla particolare traiettoria (stabilità di una traiettoria), ovvero dipende dal particolare ingresso e dallo stato iniziale. Vedremo tuttavia che per i sistemi lineari si può parlare di stabilità (semplice o asintotica) del sistema dinamico indipendentemente dal particolare ingresso e stato iniziale (conseguenza immediata del principio di sovrapposizione degli effetti).

- La proprietà di stabilità riguarda l'evoluzione dello stato. La funzione che lega stato e ingresso con l'uscita non entra nella trattazione.

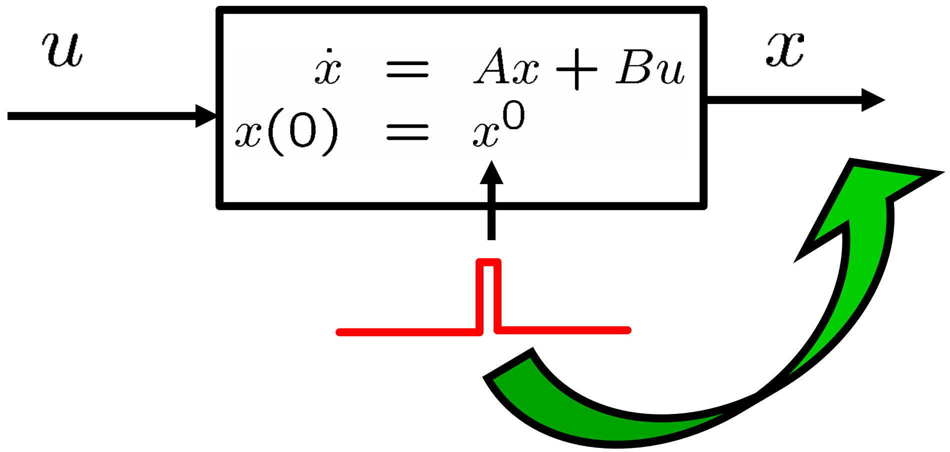
- Lo studio delle proprietà di stabilita' delle traiettorie non e' in generale un problema semplice da risolvere per sistemi nonlineari.

Stabilità

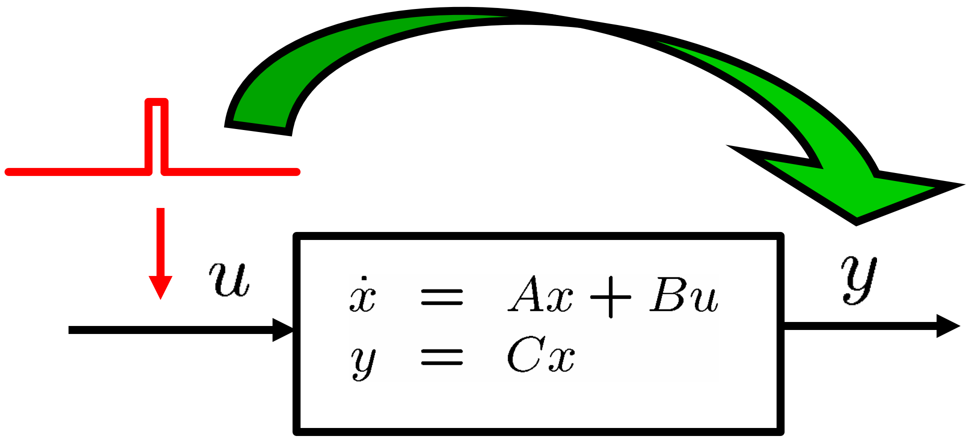
Nozione che cattura la proprietà di come un sistema dinamico reagisce a fronte di “perturbazioni”



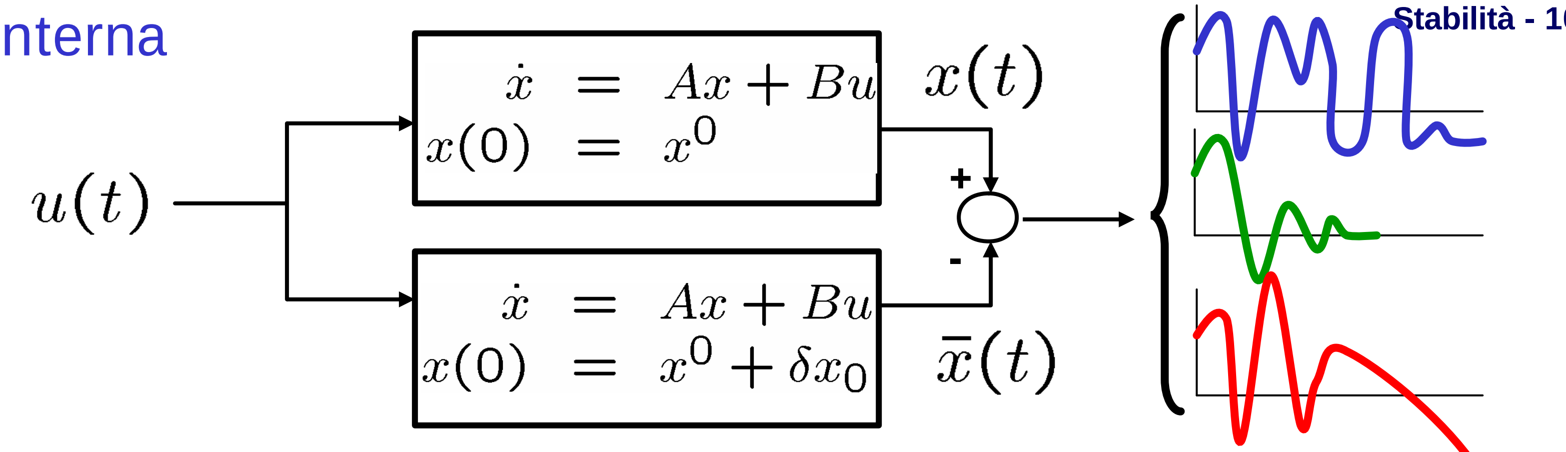
1. Stabilità interna (effetto che perturbazioni sullo stato iniziale ha sulla traiettoria dello stato)



2. Stabilità esterna (effetto che perturbazioni sull'ingresso hanno sulla traiettoria di uscita)



Stabilità interna



Data un certa traiettoria “nominale” (stato iniziale e ingresso), una perturbazione dello stato iniziale può produrre:

- una traiettoria perturbata che rimane sempre prossima a quella nominale (stabilità semplice)

- una traiettoria perturbata che rimane sempre prossima a quella nominale e tende asintoticamente ad essa (stabilità asintotica)

- una traiettoria perturbata che diverge da quella nominale (instabilità)

Definizione (stabilità): Un movimento $x(t)$ si dice stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni perturbazione dello stato iniziale tale che

$$\|\delta x_0\| \leq \delta_\epsilon$$

risulti
$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \epsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

Definizione (stabilità asintotica): una traiettoria $x(t)$ si dice asintoticamente stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni perturbazione dello stato iniziale tale che

$$\|\delta x_0\| \leq \delta_\epsilon$$

risulti

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \epsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

e inoltre (attrattività asintotica)

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0$$

Per sistemi lineari i concetti sopra esposti posso essere specializzati, senza perdita di generalità, al caso in cui l'ingresso e' identicamente nullo e la traiettoria di riferimento e' il punto di equilibrio $x = 0$

In altre parole se il sistema soddisfa certe proprietà di stabilità in assenza di ingresso e per perturbazioni rispetto allo stato iniziale $x(0) = 0$ allora il sistema mantiene le stesse proprietà rispetto traiettorie di riferimento caratterizzate da stati iniziali e funzioni di ingresso arbitrari.

Infatti (definendo per comodità $M(s) = (sI - A)^{-1}$):

Traiettoria nominale generica: $\begin{cases} \text{Stato iniziale} & x^0 \\ \text{Ingresso} & \mathcal{L}(u(t)) = U(s) \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}(M(s)BU(s) + M(s)x^0) \\
&= \mathcal{L}^{-1}(M(s)BU(s)) + \mathcal{L}^{-1}(M(s)x^0)
\end{aligned}
$$

Traiettoria perturbata generica: $\begin{cases} \text{Stato iniziale} & x^0 + \delta x_0 \\ \text{Ingresso} & \mathcal{L}(u(t)) = U(s) \end{cases}$

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}(M(s)BU(s) + M(s)(x^0 + \delta x^0)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(M(s)BU(s)) + \mathcal{L}^{-1}(M(s)x^0) + \mathcal{L}^{-1}(M(s)\delta x^0)\end{aligned}$$

e quindi: $\|\bar{x}(t) - x(t)\| = \|\mathcal{L}^{-1}(M(s)\delta x^0)\|$

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto considerando:

Traiettoria nominale particolare: $\left.\begin{cases} \text{Stato iniziale } x^0 = 0 \\ \text{Ingresso} \quad u(t) \equiv 0 \end{cases}\right\} x(t) \equiv 0$

Traiettoria perturbata particolare: $\begin{cases} \text{Stato iniziale} & \bar{x}^0 = \delta x^0 \\ \text{Ingresso} & u(t) \equiv 0 \end{cases}$

Dalle considerazioni sullo sviluppo in fratti semplici e dalla definizione di $M(s) = (sI - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$ si ha che la grandezza

$$\|\bar{x}(t) - x(t)\| = \|\mathcal{L}^{-1}(\overbrace{M(s)\delta x^0}^{\text{vettore colonna}})\|$$

risulta essere una combinazione lineare di segnali con un decadimento esponenziale governato dalla parte reale degli autovalori della matrice di stato.

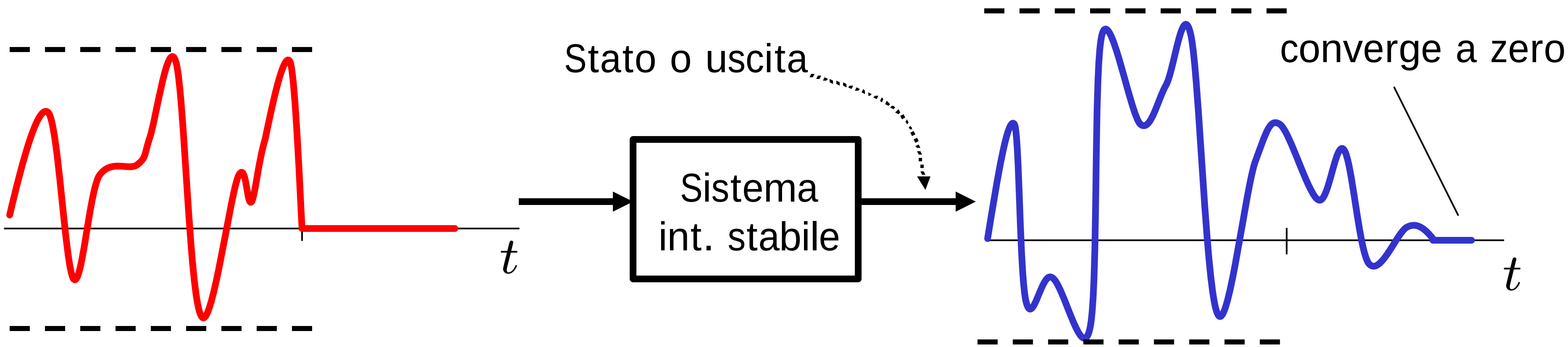
Risultato: il sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$ e' internamente

- Asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa;
- Semplicemente stabile se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale non positiva ed eventuali autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità singola;
- Instabile se esiste almeno un autovalore a parte reale positiva o a parte reale nulla e molteplicità maggiore di 1.

Osservazioni

- La stabilità asintotica interna di un sistema dinamico implica, chiaramente, anche la stabilità asintotica della traiettoria di uscita a fronte di perturbazioni dello stato iniziale (essendo la traiettoria dell'uscita una combinazione lineare di quelle dello stato)

- Dalla precedente discussione e dalle regole di antitrasformazione viste in precedenza è anche immediato verificare che se un sistema è internamente asintoticamente stabile allora le traiettorie dello stato/uscita a fronte di ingressi limitati risultano essere limitate (Stabilità Bounded-Input Bounded State (BIBS), Bounded Input-Bounded Output (BIBO))



Infatti, dato un certo ingresso $u(t)$ limitato con trasformata di Laplace $U(s) = \star(s)/D(s)$, l'evoluzione forzata risulta

$$\underbrace{M(s)}\underbrace{BU(s)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\star(s)}{\det(sI-A)} & \cdots & \frac{\star(s)}{\det(sI-A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\star(s)}{\det(sI-A)} & \cdots & \frac{\star(s)}{\det(sI-A)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\star(s)}{D(s)} \\ \vdots \\ \frac{\star(s)}{D(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\star(s)}{\det(sI-A)D(s)} \\ \vdots \\ \frac{\star(s)}{\det(sI-A)D(s)} \end{pmatrix}$$

L'antitrasformata di ciascun elemento del vettore è, dallo sviluppo in fratti semplici, la somma di termini elementari associati agli autovalori di A (esponenzialmente stabili) e alle radici di $D(s)$ (limitati).

Osservazioni

- Nel caso il sistema sia “solo” internamente <u>semplicemente</u> stabile la stabilità BIBS (BIBO) non è più garantita. Infatti ingressi che sono limitati ma “risonanti” con autovalori di A a parte reale nulla generano traiettorie instabili (si veda fine parte 3).

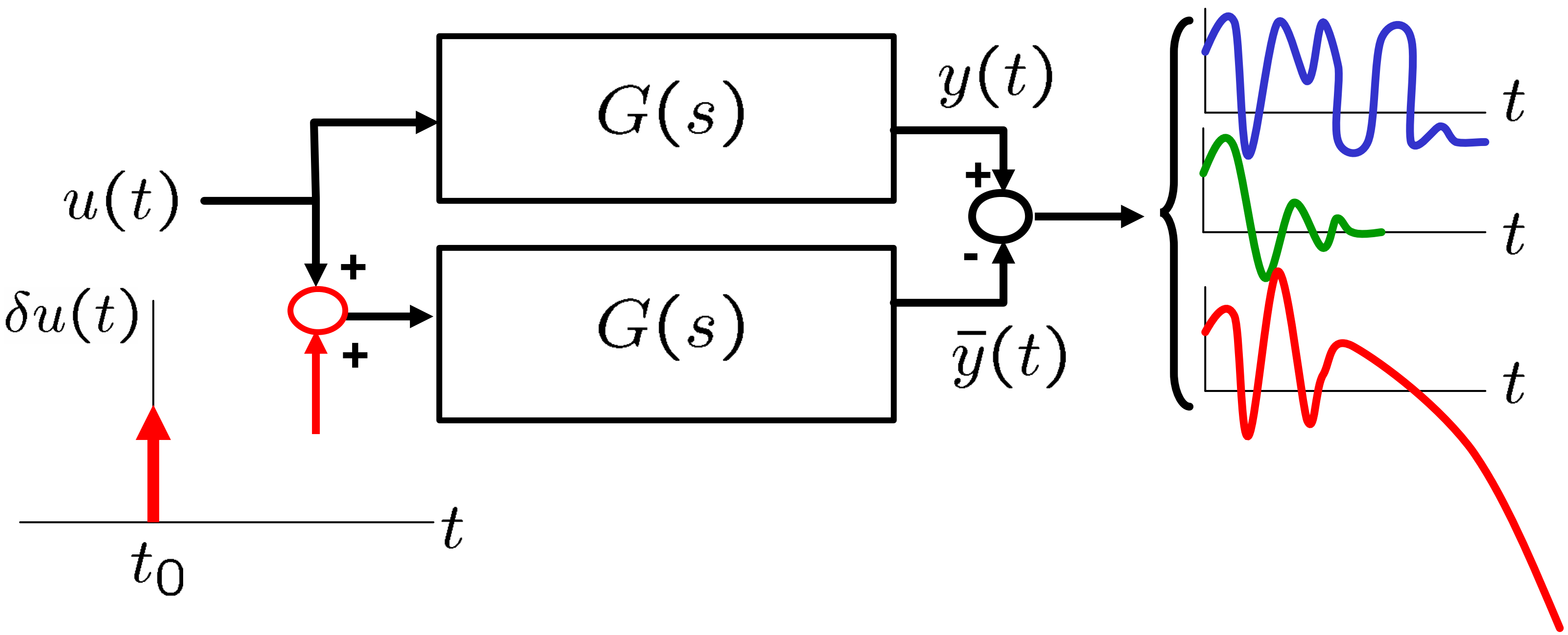
- Attenzione: la proprietà “stabilità asintotica del sistema in assenza di ingresso $\Longrightarrow$ stabilità BIBS (BIBO)” è una peculiarità dei sistemi lineari. Per sistemi non lineari è facile trovare contro-esempi:

$$\dot{x} = -x + xu \begin{cases} u \equiv 0 \;\rightarrow\; \dot{x} = -x & \text{(asintoticamente stabile)} \\ \\ \underbrace{u \equiv 2}_{\text{limitato}} \;\rightarrow\; \dot{x} = x & \text{(instabile)} \end{cases}$$

- Stabilità esterna:

Si cerca di caratterizzare le proprietà Ingresso-Uscita di un sistema a fronte di una perturbazione del segnale di ingresso (proprietà della funzione di trasferimento).

Data una traiettoria nominale del sistema (ovvero un certo stato iniziale e una certa funzione di ingresso) l'obiettivo è caratterizzare l'effetto di una perturbazione impulsiva sul segnale di ingresso.



Definizione (stabilità): Un movimento $y(t)$ si dice stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni perturbazione impulsiva dell'ingresso tale che

$$\|\delta u\| \leq \delta_\epsilon$$

risulti

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \epsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

Definizione (stabilità asintotica): una traiettoria $y(t)$ si dice asintoticamente stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni perturbazione impulsiva dell'ingresso tale che

$$\|\delta u\| \leq \delta_\epsilon$$

risulti

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \epsilon \qquad \forall\, t \geq t_0$$

e inoltre (attrattività asintotica)

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t) - \bar{y}(t)\| = 0$$

Ragionamenti analoghi a quelli fatti per la stabilità interna permettono di dire che per sistemi lineari si può considerare (senza perdita di generalità) come particolare traiettoria nominale il punto di equilibrio $(x^0 = 0, u \equiv 0)$ (conseguenza ovvia del principio di sovrapposizione degli effetti)

Quindi la stabilità esterna si riduce ad analizzare la risposta di un sistema a fronte di un ingresso impulsivo

$$\mathcal{L}(\delta u(t)) = \delta \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))\delta$$

Dalle regole di antitrasformazione è quindi facile mettere in relazione la stabilità esterna di un sistema con il segno della parte reale dei poli della funzione di trasferimento:

Risultato: il sistema lineare con fdt $G(s)$ e' esternamente

- Asintoticamente stabile se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa;
- Semplicemente stabile se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale non positiva ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità singola;
- Instabile se esiste almeno un polo a parte reale positiva o a parte reale nulla e molteplicità maggiore di 1.

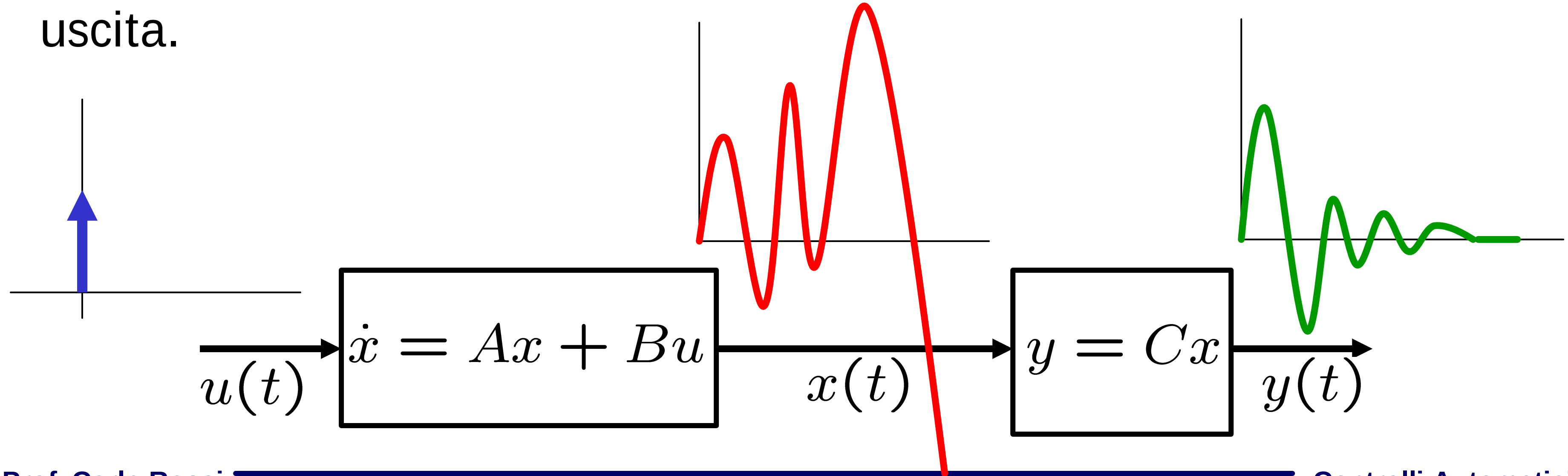
Sempre dalle proprietà di antitrasformazione di Laplace e in particolare dallo sviluppo in fratti semplici, è semplice dedurre il risultato che ogni sistema esternamente asintoticamente stabile risponde con uscite limitate a fronte di ingressi limitati non necessariamente impulsivi (stabilità **BIBO**).

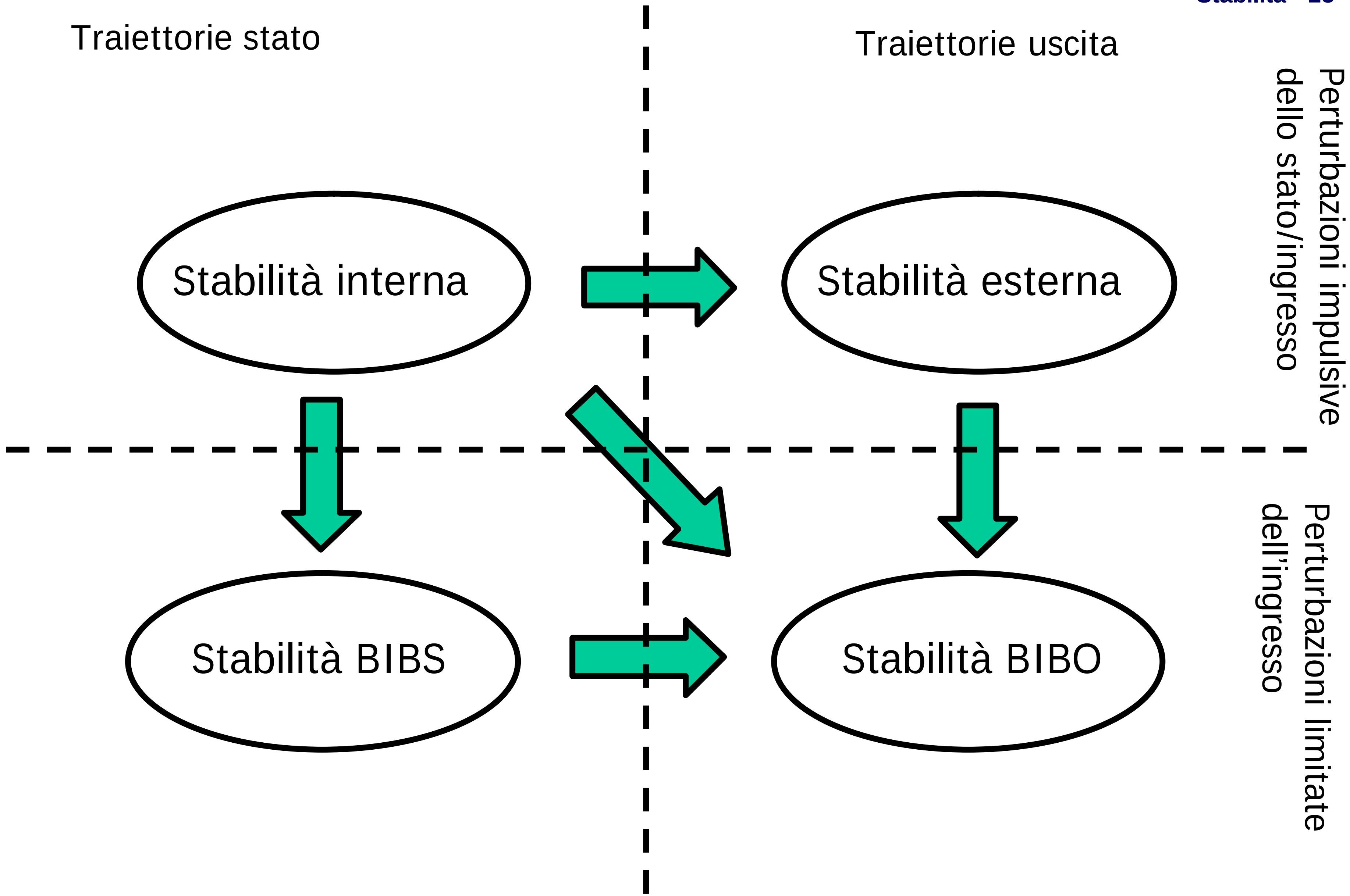
Analogamente a prima tale proprietà non è garantita nel caso di stabilità esterna semplice (risonanza tra ingresso e polo della fdt)

Relazione tra stabilità interna ed esterna

Essendo i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ un sottoinsieme degli autovalori della matrice di stato A, dai precedenti risultati discende che la stabilità semplice/asintotica esterna è implicata dalla stabilità semplice/asintotica interna

Il viceversa non è vero in quanto potrebbero esserci delle cancellazioni tra poli e zeri della fdt che corrispondono ad autovalori a parte reale positiva della matrice di stato. In questo caso esistono dei moti "interni" instabili nel sistema che non sono visibili ai morsetti ingresso uscita.




Traiettorie stato
Traiettorie uscita
Perturbazioni impulsive dello stato/ingresso
Stabilità interna
Stabilità esterna
Stabilità BIBS
Stabilità BIBO
Perturbazioni limitate dell'ingresso