Esercizi di Controlli LS - 1

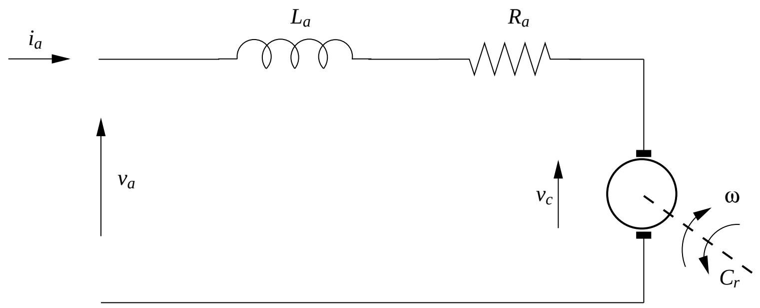

Figura 1: Motore elettrico in corrente continua.

Esercizio

- Si considera il motore elettrico in corrente continua a magneti permanenti rappresentato in Figura 1, descritto dalle equazioni

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_m \omega(t)$$
$$K_c i_a(t) = b\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} + c_r(t)$$
$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega(t)$$

con il seguente significato dei simboli:

$v_a(t)$	tensione di armatura (ingresso)
$c_r(t)$	coppia resistente (ingresso)
$i_a(t)$	corrente di armatura
$\omega(t)$	velocità angolare
$\vartheta(t)$	posizione angolare
R_a	resistenza di armatura
L_a	induttanza di armatura
K_m	costante della fcem di armatura
J	momento di inerzia
b	coefficiente di attrito viscoso
K_c	costante di coppia del motore

Assumendo come ingressi v_a e c_r, come stato i_a, ω e ϑ, come uscite ω e ϑ, ricavare le matrici (A, B, C, D) che descrivono il sistema in forma di stato.

Assumendo come valore dei parametri:

$$R_a = 1$$
$$L_a = 0.07$$
$$K_c = 0.1$$
$$J = 10$$
$$b = 1$$
$$K_m = 0.1$$

- si studi la risposta del sistema all'impulso e al gradino unitario:
- agendo solo sull'ingresso $v_a(t)$, si realizzi un controllo in retroazione della posizione e se ne studi la risposta all'impulso, al gradino unitario e ad un ingresso sinusoidale:

- agendo solo sull'ingresso $v_a(t)$, si realizzi un controllo in retroazione della velocità e se ne studi la risposta all'impulso, al gradino unitario e ad un ingresso sinusoidale:
- agendo solo sull'ingresso $v_a(t)$, si realizzi un controllo in retroazione della posizione e della velocità e se ne studi la risposta all'impulso, al gradino unitario e ad un ingresso sinusoidale.

Comandi MatLab da utilizzare: ss, impulse, step, lsim.

Soluzione

Determiniamo le matrici (A,B,C,D). Le equazioni che descrivono il sistema possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K_m}{L_a}\omega(t) + \frac{1}{L_a} v_a(t) \tag{1}$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{K_c}{J} i_a(t) - \frac{b}{J}\omega(t) - \frac{1}{J} c_r(t) \tag{2}$$

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega(t) \tag{3}$$

Scrivendo il sistema di equazioni formato dalla (1),(2) e (3) in forma matriciale ed esplicitando le componenti dello stato, degli ingressi e delle uscite si ottine:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\vartheta(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} & 0 \\ \frac{K_c}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

É possibile scrivere la (4) e la (5) in forma più compatta ponendo:

$$x(t) = [i_a(t) \quad \omega(t) \quad \vartheta(t)]^T, \qquad u(t) = [v_a(t) \quad c_r(t)]^T, \qquad y(t) = [\omega(t) \quad \vartheta(t)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} & 0 \\ \frac{K_c}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene la classica rappresentazione di un sistema dinamico in forma di stato:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{6}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \tag{7}$$

Per lo studio della risposta del sistema all'impulso e al gradino si faccia riferimento al M-file allegato motorecc.m.

Vediamo ora come realizzare un controllo in retroazione della posizione dell'albero motore $\vartheta(t)$ di tipo proporzionale, agendo sul solo ingresso $v_a(t)$.

Si definisce la funzione errore $e(t)$ data dalla differenza fra una posizione di riferimento $\vartheta_{ref}(t)$ a cui si vuole portare il sistema e la posizione attuale dell'albero motore $\vartheta(t)$:

$$e(t) = \vartheta_{ref}(t) - \vartheta(t) \tag{8}$$

Siccome si vuole realizzare un controllo di tipo proporzionale agendo solo sulla tensione con cui si pilota il motore $v_a(t)$, si avrà che:

$$v_a(t) = k_p e(t) = k_p(\vartheta_{ref}(t) - \vartheta(t)) \tag{9}$$

dove con k_p si indica la costante di guadagno del controllore. Il vettore degli ingressi del sistema $u(t)$ può quindi essere riscritto come:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p(\vartheta_{ref}(t) - \vartheta(t)) \\ c_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p\vartheta_{ref}(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_p\vartheta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Si noti che l'ingresso del motore è ora costituito dalla somma di due contributi, il primo dovuto alla posizione di riferimento $\vartheta_{ref}(t)$ e alla coppia resistente $c_r(t)$ e il secondo dovuto alla posizione dell'albero motore $\vartheta(t)$ che è un'uscita del sistema. Indicando con $p(t) = [\vartheta_{ref}(t) \quad c_r(t)]^T$ il nuovo ingresso del sistema controllore+motore ed esplicitando il contributo dovuto alla retroazione del uscite $y(t)$ la (10) si può scrivere come:

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{ref}(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} = K_i p(t) + K y(t) \tag{11}$$

dove si è posto

$$K_i = \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & -k_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Andando a sostituire la (11) nella (6) e riscrivendo la (7) tralasciando il termine dovuto alla D che è nulla si ottiene:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(K_i p(t) + K y(t)) = Ax(t) + BK_i p(t) + BK y(t) \tag{12}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{13}$$

e sostituendo la (13) nella (12) e raccogliendo i termini che moltiplicano lo stato $x(t)$ si ha:

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) + BK_i p(t) \tag{14}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{15}$$

Ponendo

$$\hat{A} = (A + BKC), \qquad \hat{B} = BK_i, \qquad \hat{C} = C, \qquad \hat{D} = D$$

le (14) e (15) rappresentano il nuovo sistema dinamico controllore+motore

$$\dot{x}(t) = \hat{A}\, x(t) + \hat{B}\, p(t) \tag{16}$$
$$y(t) = \hat{C}\, x(t) + \hat{D}\, p(t) \tag{17}$$

Per lo studio della risposta del sistema all'impulso, al gradino e alla sinusoide si faccia riferimento al M-file allegato motorecc.m.

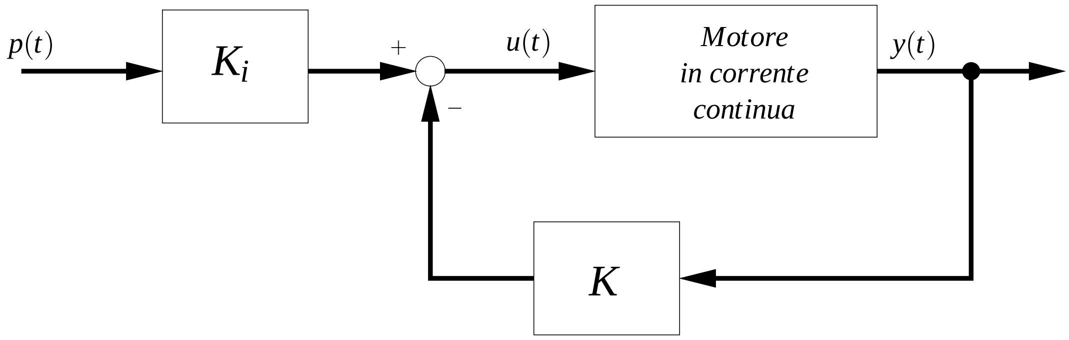

Figura 2: Schema del controllo in retroazione realizzato.

Per realizzare il controllo in retroazione della velocità, il procedimento è analogo a quanto visto nel caso del controllo di posizione. Si definisce la funzione errore $e(t)$ come:

$$e(t) = \omega_{ref}(t) - \omega(t) \tag{18}$$

quindi la tensione in ingresso al motore $v_a(t)$ sarà data da:

$$v_a(t) = k_v e(t) = k_v\left(\omega_{ref}(t) - \omega(t)\right) \tag{19}$$

dove con k_v si indica la costante di guadagno del controllore. Il vettore degli ingressi del sistema $u(t)$ può quindi essere riscritto come:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_v(\omega_{ref}(t) - \omega(t)) \\ c_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_v\omega_{ref}(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_v\omega(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Indicando con $p(t) = [\omega_{ref}(t) \;\; c_r(t)]^T$ il nuovo ingresso del sistema controllore+motore ed esplicitando il contributo dovuto alla retroazione del uscite $y(t)$ la (20) si può scrivere come:

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{ref}(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} = K_i p(t) + K y(t) \tag{21}$$

dove si è posto

$$K_i = \begin{bmatrix} k_v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} -k_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La definizione delle matrici $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ che descrivono il sistema controllore+motore rimane inalterata rispetto al caso precedente.

Per lo studio della risposta del sistema all'impulso, al gradino e alla sinusoide si faccia riferimento al M-file allegato motorecc.m.

Nel caso si voglia realizzare un controllo in retroazione sia della posizione che della velocità, ci si può ricondurre al caso del solo controllo di posizione con l'unica differenza che nella (9) si deve aggiungere un termine proporzionale alla velocità dell'albero motore:

$$v_a(t) = k_p(\vartheta_{ref}(t) - \vartheta(t)) - k_v\omega(t) \tag{22}$$

dove con k_p si indica la costante di posizione e con k_v la costante di velocità. Il vettore degli ingressi del sistema $u(t)$ può quindi essere riscritto come:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p(\vartheta_{ref}(t) - \vartheta(t)) - k_v\omega(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p\vartheta_{ref}(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_p\vartheta(t) - k_v\omega(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Indicando con $p(t) = [\vartheta_{ref}(t) \;\; c_r(t)]^T$ il nuovo ingresso del sistema controllore+motore ed esplicitando il contributo dovuto alla retroazione del uscite $y(t)$ la (23) si può scrivere come:

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{ref}(t) \\ c_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_v & -k_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} = K_i p(t) + K y(t) \tag{24}$$

dove si è posto

$$K_i = \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} -k_v & -k_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La definizione delle matrici $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ che descrivono il sistema controllore+motore rimane inalterata rispetto al caso della sola retroazione di posizione.

Per lo studio della risposta del sistema all'impulso, al gradino e alla sinusoide si faccia riferimento al M-file allegato motorecc.m.