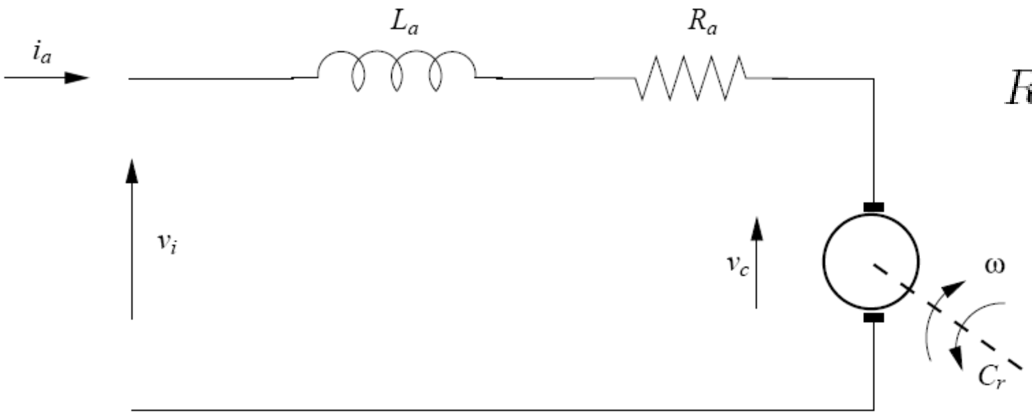
CONTROLLI AUTOMATICI LS
Ingegneria Informatica

Motore in corrente continua: Controllo ottimo tempo infinito e finito

Gianni Borghesan

gianni.borghesan@unibo.it

Modello



$$R_a = 1, \quad L_a = 0.1, \quad K_c = 0.1$$

$$J = 10, \quad b = 1, \quad K_m = 0.1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\vartheta(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} & 0 \\ \frac{K_c}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix}$$

Esercizio 1

- Costruire L'osservatore dello stato in tempo continuo
- Realizzare una legge di controllo ottimo a tempo infinito che minimizzi
    1. corrente assorbita,
    2. la posizione del motore,
    3. e la tensione in ingresso.
- Determinare il coefficiente di guadagno statico del sistema retroazionato in modo da ottener il coefficiente di scalatura, affichè il sistema insegua un riferimento di posizione. (comando dcgain)
- Provare diversi valori di pesi sulla posizione

Esercizio 1

- La funzione costo è del tipo

$$J = \int_0^{\infty} [x_1 \quad x_2 \quad x_3] Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + Ru^2 dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

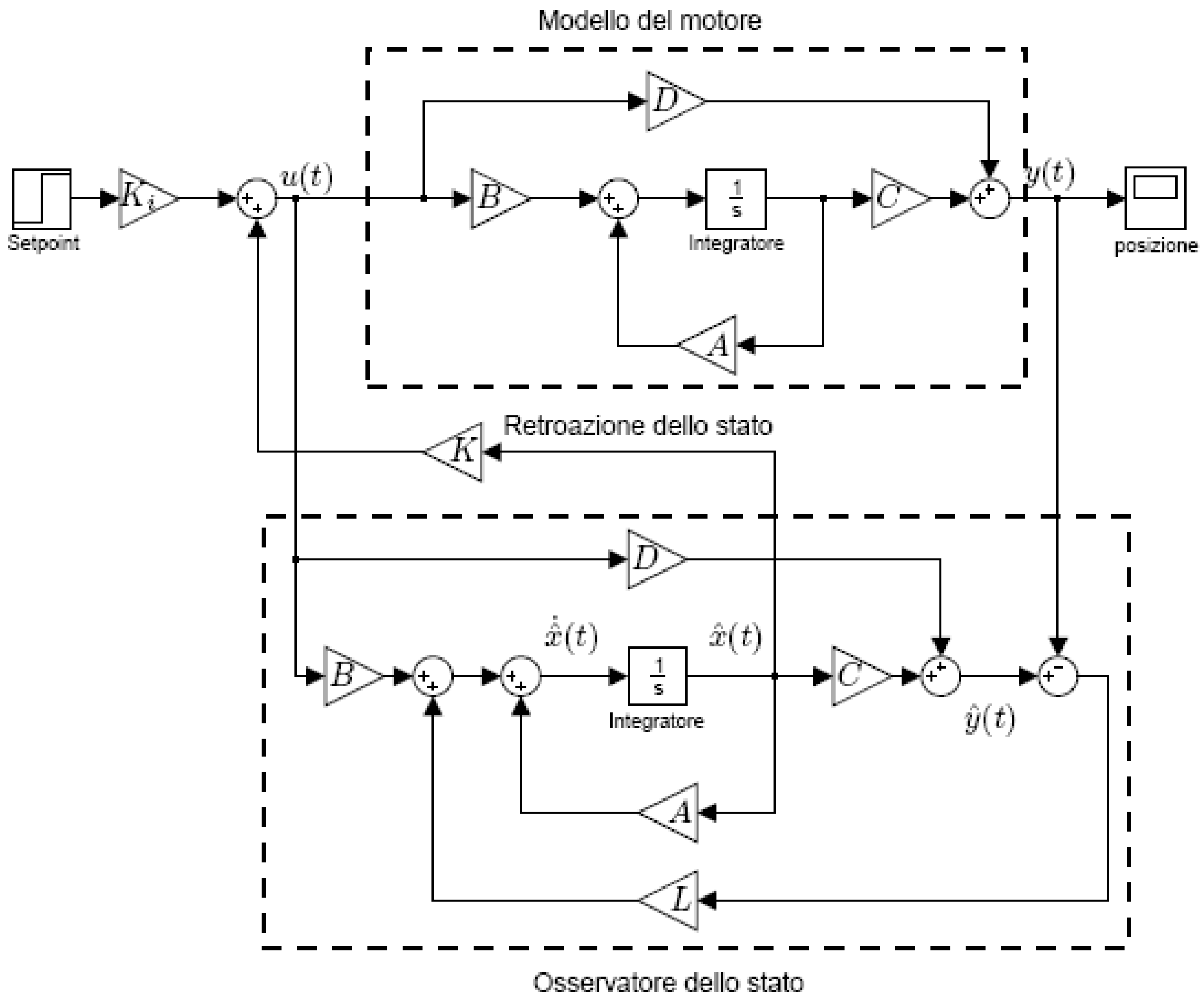
- La legge di controllo che andremo a cercare è del tipo

$$u(t) = Kx = -R^{-1}B^T Sx, \qquad SA + A^T S - SBR^{-1}S + Q = 0$$

La matrice K viene calcolata direttmante dal comando

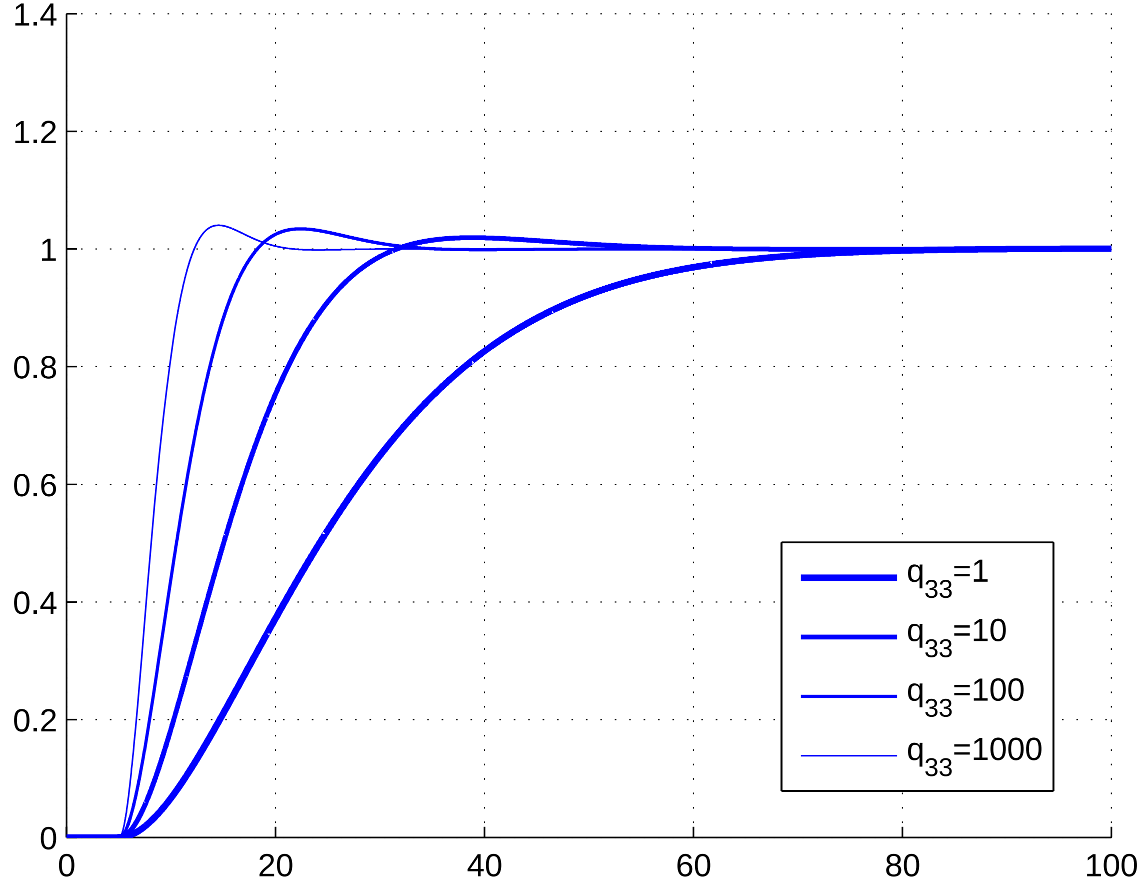
```
[S,autov,K]=care(A,B,Q,R);
K=-K;
```

Esercizio 1


Modello del motore
Setpoint
K_i
$u(t)$
D
B
1/s
Integratore
C
A
$y(t)$
posizione
Retroazione dello stato
K
$\dot{\hat{x}}(t)$
$\hat{x}(t)$
$\hat{y}(t)$
L
Osservatore dello stato

Esercizio 1

- Variazione di Q_{33}



Esercizio 2

- Controllo ottimo tempo finito a minima energia

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T R u \, dt$$

- Consideriamo R=1; La funzione Hamiltoniana è

$$H(t) = u^2(t) + \lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t))$$

- È noto lo stato iniziale x_0 , lo stato finale x_f, ed il tempo finale
- Dinamica del costato:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda$$

- Condizione di stazionarietà:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2Ru + B^T \lambda = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{2} B^T \lambda$$

Esercizio 2

- Sostituendo

$$\dot{x} = Ax - \frac{1}{2}BB^T\lambda$$

- L'equazione del sistema Hamiltoniano diventa

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BB^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

- La soluzione di questo sistema è della forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{Ht} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$$

- Da cui si può valutare il valore dello stato esteso al tempo finale

$$\begin{bmatrix} x_f \\ \lambda_f \end{bmatrix} = e^{Ht_f} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = Htf \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Htf_{11} & Htf_{12} \\ Htf_{21} & Htf_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

- Di questo sistema sono noti x_0 e x_f e bisogna ricavare lamda iniziali e finali, e quindi la sua espressione

$$\lambda_0 = Htf_{12}^{-1}(x_f - Htf_{11}x_0)$$
$$\lambda_f = Htf_{21}x_0 + Htf_{22}\lambda_0$$

- Il sistema Hamiltoniano diventa

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = e^{Ht}\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = Ht(t)\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ht(t)_{11} & Ht(t)_{12} \\ Ht(t)_{21} & Ht(t)_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$$

- E la legge di controllo ottimo diventa:

$$u = -\frac{1}{2}B^T\lambda = -\frac{1}{2}B^T(Ht_{21}(t)x_0 + Ht_{22}(t)\lambda_0)$$

- Nel caso di minima energia

$$Ht_{21}(t) = 0$$

Esercizio 2

- Implementare questo legge di controllo ottimo con

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ t_f = 1$$

1. Dichiarare “global u t” nello script di inizializzazione
2. Trovare la matrice H
3. Determinare Htf=expm(H*tf) e determinare lamda inziale
4. Definire il tempo come variabile simbolica (syms t)
5. Calcolare l’esponenziale Ht=expm(H*t) (opzionalmente si può utilizzare la forma di Jordan)
6. Determinare la funzione ottima u(t) in funzione di t simbolico
7. Creare una matlab function e relatico blocco simulink che valuti u(t)

```
function [y]=controlloottimo(time)
% variabili globali, importate dal file di inizializzazione del problema
global u t
y=subs(u,t,time); % sostituzione del tempo di simulazione (time) nella legge di controllo ottima (u)
```

CONTROLLI AUTOMATICI LS

Motore in corrente continua: Controllo ottimo tempo infinito e finito FINE

Gianni Borghesan

gianni.borghesan@unibo.it