Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 11 Dicembre 2008

1. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{x_2^3}{2} - 2\,x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \frac{x_2^3}{4} \end{cases}$$

   a) Trovare i punti di equilibrio del sistema;
   b) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio tramite il metodo di linearizzazione.
   c) Verificare se la funzione $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4$ è una funzione di Lyapunov per i punti di equilibrio determinati al punto a).

2. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3\,x_2 - 2\,x_1 + u(t) \end{aligned}$$

   e l'indice di comportamento

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right) dt$$

   si progetti la matrice di retroazione dello stato tale da realizzare una legge di controllo ottimo ad orizzonte infinito. Si assuma $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = 1$.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 0]^T$ e in quanti passi, considerando solo l'evoluzione libera del sistema;
   c) Determinare se è possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0]^T$ considerando solo l'evoluzione forzata del sistema e determinare il minimo numero di passi necessari per raggiungere tale stato;
   d) Determinare, se esistono, due ingressi $u(0)$ e $u(1)$ che consentano di raggiungere in due passi lo stato $x(2) = [0 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0]^T$, partendo da condizione iniziale $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ (considerare evoluzione libera ed evoluzione forzata).

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \;\; 0 \;\; 0]\, x(k) \end{aligned}$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;
   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;
   c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

   si determini la legge di controllo tempo finito ad energia minima tale che, partendo dallo stato iniziale $x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0$, si raggiunga lo stato finale dove $x_1(t_f) = 2,\ x_2(t_f) = 2$ in 4 secondi.

Cognome, Nome, N. Matr.: ______________________

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 11 Dicembre 2008

1. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{x_2^3}{2} - 2\,x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \frac{x_2^3}{4} \end{cases}$$

   a) Trovare i punti di equilibrio del sistema;
   b) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio tramite il metodo di linearizzazione.
   c) Verificare se la funzione $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4$ è una funzione di Lyapunov per i punti di equilibrio determinati al punto a).

Soluzione

a) I punti di equilibrio si trovano ponendo a zero la derivata dello stato nelle equazione dinamiche del sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{x_2^3}{2} - 2\,x_1 \\ 0 &= x_1 - \frac{x_2^3}{4} \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ricava:

$$x_1 = \frac{x_2^3}{4}$$

e sostituendo nella prima si ottiene:

$$x_2^3 = 0$$

da cui

$$x_{eq} = [0 \;\; 0]^T$$

b) Per linearizzare il sistema occorre calcolare lo Jacobiano del sistema nel punto di equilibrio:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= J_x\Big|_{x_{eq}} x(t) = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2}\,x_2^2 \\ 1 & -\frac{3}{4}\,x_2^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_{eq}} x(t) \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Gli autovalori della matrice Jacobiana sono

$$\lambda = [-2 \;\; 0]$$

Segue che non è possibile determinare se il punto di equilibrio considerato è stabile o instabile a causa dell'autovalore nullo dello Jacobiano.

c) La derivata rispetto al tempo della funzione V è:

$$\dot{V} = x_1\,\dot{x}_1 + x_2^3\,\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1x_2^3 - 2\,x_1^2 + x_1x_2^3 - \frac{1}{4}x_2^6$$

da cui

$$\dot{V} = -[x_1 \;\; x_2^3]\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = -[x_1 \;\; x_2^3]\,Q\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$$

È possibile verificare che la matrice Q risulta definita positiva (il primo minore è pari a 2, quindi positivo, e il determinante è positivo), quindi la funzione V è una funzione di Lyapunov per il sistema enll'intorno del punto considerato. Inoltre, essendo la V radialmente illimitata ed essendo la $\dot{V}$ definita negativa su tutto $\mathbb{R}^n$, l'origine risulta globalmente asintoticamente stabile.

2. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3\,x_2 - 2\,x_1 + u(t) \end{aligned}$$

e l'indice di comportamento

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right) dt$$

si progetti la matrice di retroazione dello stato tale da realizzare una legge di controllo ottimo ad orizzonte infinito. Si assuma $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = 1$.

Soluzione

L'equazione algebrica di Riccati nel caso tempo continuo è:

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$$

Sostituendo i dati del problema, si ricava il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} S_2^2 + 4\,S_2 - 1 &= 0 \\ S_1 - 3\,S_2 - 2\,S_3 - S_2\,S_3 &= 0 \\ S_3^2 + 6\,S_3 - 2\,S_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ricavano due possibili soluzioni per $S_2 = -2 \pm \sqrt{5}$. Si procede considerando come possibile soluzione $S_2 = -2 + \sqrt{5}$. Sostituendo nella terza equazione si ottiene:

$$S_3 = -3 \pm \sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}}$$

Considerando come primo tentativo il valore $S_3 = -3 + \sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}}$, dalla seconda si ottiene $S_1 = -6 + \sqrt{5}\sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}}$. La matrice S che si ottiene risulta quindi essere:

$$S = \begin{bmatrix} -6 + \sqrt{5}\sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}} & -2 + \sqrt{5} \\ -2 + \sqrt{5} & -3 + \sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

che è definita positiva. La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$\begin{aligned} K &= -R^{-1}B^T S = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 + \sqrt{5}\sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}} & -2 + \sqrt{5} \\ -2 + \sqrt{5} & -3 + \sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5 + 2\,\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le matrici S ricavate con le altre possibili soluzioni risultano definite negative.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 0]^T$ e in quanti passi, considerando solo l'evoluzione libera del sistema;
   c) Determinare se è possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0]^T$ considerando solo l'evoluzione forzata del sistema e determinare il minimo numero di passi necessari per raggiungere tale stato;
   d) Determinare, se esistono, due ingressi $u(0)$ e $u(1)$ che consentano di raggiungere in due passi lo stato $x(2) = [0 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0]^T$, partendo da condizione iniziale $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ (considerare evoluzione libera ed evoluzione forzata).

Soluzione

   a) La matrice A presenta un autovalore di molteplicità algebrica 4 in $\lambda_{1,2,3,4} = 2$.
   La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Jordan è:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A in forma di Jordan risulta quindi essere:

$$A_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) L'evoluzione libera del sistema è data da:

$$\begin{aligned} x(k) &= T A_J^k T^{-1} x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & k\,2^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & k\,2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 & 0 \\ 0 & k\,2^{k-1} & 2^k & 0 \\ k\,2^{k-1} & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2^k \\ k\,2^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lo stato finale $x_f = [0 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 0]^T$ non è raggiungibile mediante evoluzione libera del sistema.

c) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad im(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo stato finale $x_f = [0 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0]^T$ è raggiungibile mediante evoluzione forzata del sistema perchè appartiene al sottospazio descritto dalla matrice di raggiungibilià. Lo stato desiderato è raggiungibile in due passi a partire dallo stato zero.

d) Considerando evoluzione libera e forzata, al passo $k = 2$ si ha:

$$\begin{aligned} x(2) &= A^2 x_0 + [B \;\; AB] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(1) + 2\,u(0) \\ u(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per cui:

$$u(0) = -3, \quad u(1) = 5.$$

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \;\; 0 \;\; 0]\, x(k) \end{aligned}$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;

b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad ker(Q) = (im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q)$:

$$ker(A^3) = im((A^3)^T)^{\perp} = im\left(\begin{bmatrix} -27 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T\right)^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \supseteq ker(Q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è quindi ricostruibile in 3 passi. Allo stesso modo, è possibile verificare che il sistema è ricostruibile anche 2 passi ma non in 1 passo:

$$ker(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\supseteq ker(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove C è la matrice di osservabilità ad 1 passo.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = [im(Q^T) \;\; ker(Q)] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \rightarrow T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asitoticamente stabile perchè ha un autovalore in 0, pertanto è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato. Per garantire la massima velocità di convergenza, occorre progettare un osservatore che porti a zero gli autovalori della parte osservabile (osservatore dead beat). Segue che il polinomio desiderato è $p(\lambda) = \lambda^3$. Procedendo per allocazione diretta del polinomio caratteristico, si ha che

$$det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^3 \quad \rightarrow \quad L = [4 \;\; 0 \;\; -1]^T.$$

5. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

si determini la legge di controllo tempo finito ad energia minima tale che, partendo dallo stato iniziale $x_1(t_0) = 0, \; x_2(t_0) = 0$, si raggiunga lo stato finale dove $x_1(t_f) = 2, \; x_2(t_f) = 2$ in 4 secondi.

Soluzione

La funzione Hamiltoniana del sistema è:

$$\begin{aligned} H(t) &= u^2(t) + \lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t)) \\ &= u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \end{aligned}$$

Lo stato iniziale e finale sono assegnati, insieme all'istante finale, per cui non esistono vincoli sulle condizioni finali delle variabili del sistema ausiliario. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{array}{lcl} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 & \rightarrow & \lambda_1(t) = \lambda_{1f} \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) & \rightarrow & \lambda_2(t) = -\lambda_{1f}(t - t_f) + \lambda_{2f} \end{array}$$

Dalla condizione di stazionarietà si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u(t) + \lambda_2(t) = 0, \quad \rightarrow \quad u(t) = -\frac{1}{2}\lambda_2(t) = \frac{1}{2}[\lambda_{1f}(t - t_f) - \lambda_{2f}]$$

Sostituendo l'espressione di $u(t)$ nelle precendenti equazioni, integrando e considerando $t_0 = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{12}\lambda_{1f}\, t^3 - \frac{1}{4}\lambda_{1f}\, t_f\, t^2 - \frac{1}{4}\lambda_{2f}\, t^2 \\ x_2(t) &= \frac{1}{4}\lambda_{1f}\, t^2 - \frac{1}{2}\lambda_{1f}\, t_f\, t - \frac{1}{2}\lambda_{2f}\, t \end{aligned}$$

che calcolate in $t = t_f$ sono:

$$\begin{aligned} x_1(t_f) &= \frac{1}{12}\lambda_{1f}\, t_f^3 - \frac{1}{4}\lambda_{1f}\, t_f^3 - \frac{1}{4}\lambda_{2f}\, t_f^2 = 2 \\ x_2(t_f) &= \frac{1}{4}\lambda_{1f}\, t_f^2 - \frac{1}{2}\lambda_{1f}\, t_f^2 - \frac{1}{2}\lambda_{2f}\, t_f = 2 \end{aligned}$$

Dal momento che l'istante t_f è noto, si ha:

$$\lambda_{1f} = \frac{3}{4}, \quad \lambda_{2f} = -\frac{5}{2}$$

L'espressione della legge di controllo ottimo è quindi:

$$u(t) = \frac{3}{8}t - \frac{1}{4}$$