Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 14 Gennaio 2009

1. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo con ingresso u

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \sin(x_2) + 3 + u \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) - x_2 \end{cases}$$

   a) Verificare che il punto $[x_1, x_2, u] = [\pi, 0, -3 + \pi]$ sia un punto di equilibrio e studiarne la stabilità;

   b) Verificare che il punto $[x_1, x_2, u] = [0, 0, -3]$ sia un punto di equilibrio e studiarne la stabilità.

   c) Verificare se la funzione $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ è una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio determinato al punto b). *Suggerimento*: si usi l'approssimazione $\sin(x) = x$ per x prossimo allo zero.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo ad un ingresso ed una uscita:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo;

   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllo;

   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;

   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0 \ \ 1/2 \ \ -1/2 \ \ 1]^T$ e in quanti passi, considerando solo l'evoluzione libera del sistema;

   c) Determinare se è possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0 \ \ 1/2 \ \ -1/2 \ \ 1]^T$ considerando solo l'evoluzione forzata e determinare il minimo numero di passi necessari per raggiungere tale stato;

   d) Determinare, se esistono, la serie di ingressi $u(k)$ che consentono di raggiungere in due passi lo stato $x(2) = [0 \ \ 1/2 \ \ -1/2 \ \ 1]^T$, partendo da condizione iniziale $x_0 = [0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1]^T$.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \ \ 0 \ \ 0]\, x(k)$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;

   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

   c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

   Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N (x_N - 2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\alpha x^2(k) + \beta u^2(k) + 2x(k)u(k)\right)$$

   a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

   b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

   c) Ponendo $a = 1/2, b = 1/4, \alpha = 1, \beta = 1, \alpha_N = 20$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 0$.

Cognome, Nome, N. Matr.: ______________________

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 14 Gennaio 2009

1. Dato il sistema dinamico non lineare tempo continuo con ingresso u

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - \sin(x_2) + 3 + u \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_2 \end{cases}$$

   a) Verificare che il punto $[x_1, x_2, u] = [\pi, 0, -3 + \pi]$ sia un punto di equilibrio e studiarne la stabilità;
   b) Verificare che il punto $[x_1, x_2, u] = [0, 0, -3]$ sia un punto di equilibrio e studiarne la stabilità.
   c) Verificare se la funzione $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ è una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio determinato al punto b). *Suggerimento*: si usi l'approssimazione $\sin(x) = x$ per x prossimo allo zero.

Soluzione

a) Si verifica che il punto $[x_1, x_2, u] = [\pi, 0, -3 + \pi]$ è di equilibrio calcolando le derivate prime in tale punto:

$$\left.\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \sin(x_2) + 3 + u \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) - x_2 \end{cases}\right|_{[x_1,x_2,u]=[\pi,0,-3+\pi]} = 0$$

Per applicare il metodo di linearizzazione bisogna calcolare la matrice Jacobiana relativa al punto di equilibrio e studiarne gli autovalori:

$$J_x = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(x_2) \\ -\cos(x_1) & -1 \end{bmatrix}_{[x_1,x_2]=[\pi,0]} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il Punto di equilibrio risulta stabile in quanto gli autovalori di J_x sono $\lambda = -1 \pm i$.

b) Si verifica che il punto $[x_1, x_2, u] = [0, 0, -3]$ è di equilibrio calcolando le derivate prime in tale punto:

$$\left.\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \sin(x_2) + 3 + u \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) - x_2 \end{cases}\right|_{[x_1,x_2,u]=[0,0,-3]} = 0$$

Per applicare il metodo di linearizzazione bisogna calcolare la matrice Jacobiana relativa al punto di equilibrio e studiarne gli autovalori:

$$J_x = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(x_2) \\ -\cos(x_1) & -1 \end{bmatrix}_{[x_1,x_2]=[0,0]} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Non è possibile determinare la stabilità del punto col metodoto della linearizzazione in quanto gli autovalori di J_x sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Si deve quindi procedere nella verificare che la funzione

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Sia una funzione di Lyapnov La derivata rispetto al tempo risulta:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} = -x_1((x_1) + \sin(x_2)) - x_2(x_2 + \sin(x_1)) \\ &= -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 \sin(x_2) + x_2 \sin(x_1)) \end{aligned}$$

Approssimando

$$\sin x = x$$

si ottiene

$$\dot{V}(x) = -(x_1 + x_2)^2 \leq 0$$

Utilizzando, in alternativa, un approssimazione del secondo ordine si ottiene

$$\dot{V}(x) = -(x_1 + x_2)^2 + \frac{x_1 x_2}{6}(x_1^2 + x_2^2)$$

operando il limite per x_1, x_2 che tendono ad ϵ infinitamente piccolo si ottiene

$$\dot{V}(x) = -2\epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3} \approx -2\epsilon^2$$

la funzione è quindi negativa e si può asserire la stabilità non asintotica del punto.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo ad un ingresso ed una uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo;
   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllo;
   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

Per prima cosa si determina la matrice di raggiungibilità:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 10 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8 = 0$$

per cui la matrice R^{-1} risulta:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$T = PR^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di controllo risulta quindi:

$$\begin{aligned} A_c = T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_C = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_c = CT &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico che si vuole assegnare al sistema è:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$K = K_cT^{-1} = \begin{bmatrix} -14 & -11 & -1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1.75 & 3.5 & -4.5 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0\ \ 1/2\ \ -1/2\ \ 1]^T$ e in quanti passi, considerando solo l'evoluzione libera del sistema;
   c) Determinare se è possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [0\ \ 1/2\ \ -1/2\ \ 1]^T$ considerando solo l'evoluzione forzata e determinare il minimo numero di passi necessari per raggiungere tale stato;
   d) Determinare, se esistono, la serie di ingressi $u(k)$ che consentono di raggiungere in due passi lo stato $x(2) = [0\ \ 1/2\ \ -1/2\ \ 1]^T$, partendo da condizione iniziale $x_0 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]^T$.

Soluzione

a) La matrice A presenta un autovalore di molteplicità algebrica 4 in $\lambda_{1,2,3,4} = 1$.
La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Jordan è:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A in forma di Jordan risulta quindi essere:

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) L'evoluzione libera del sistema è data da:

$$\begin{aligned} x(k) &= TA_J^kT^{-1}x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Lo stato finale $x_f = [0 \;\; 1/2 \;\; -1/2 \;\; 1]^T$ non è raggiungibile mediante evoluzione libera del sistema.

c) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad im(P) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo stato finale $x_f = [0 \;\; 1/2 \;\; -1/2 \;\; 1]^T$ è non raggiungibile mediante evoluzione forzata del sistema perchè non appartiene al sottospazio descritto dalla matrice di raggiungibilià.

d) Considerando evoluzione libera e forzata, al passo k si ha:

$$x(k) = A^kx_0 + P_k \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \sum_{n=0}^{k-1} u(n) \\ -\sum_{n=0}^{k-1} u(n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per cui, non esiste nessuna sequenza di ingresso che porti allo stato finale desiderato.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \;\; 0 \;\; 0]\, x(k) \end{aligned}$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;

b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad ker(Q) = (im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q)$:

$$ker(A^3) = im((A^3)^T)^{\perp} = im\left(\begin{bmatrix} -125 & 39 & 39 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 \end{bmatrix}^T\right)^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \supseteq ker(Q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è quindi ricostruibile in 3 passi. Allo stesso modo, è possibile verificare che il sistema è ricostruibile anche 2 passi ma non in 1 passo:

$$ker(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\supseteq ker(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove C è la matrice di osservabilità ad 1 passo.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = [im(Q^T) \;\; ker(Q)] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \rightarrow \; T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asitoticamente stabile perchè ha un autovalore in 0, pertanto è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato. Per garantire la massima velocità di convergenza, occorre progettare un osservatore che porti a zero gli autovalori della parte osservabile (osservatore dead beat). Segue che il polinomio desiderato è $p(\lambda) = \lambda^3$. Procedendo per allocazione diretta del polinomio caratteristico, si ha che

$$det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^3 \quad \rightarrow \quad L = [7 \;\; -4 \;\; 0]^T.$$

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N(x_N - 2)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\alpha x^2(k) + \beta u^2(k) + 2x(k)u(k)\right)$$

a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

c) Ponendo $a = 1/2, b = 1/4, \alpha = 1, \beta = 1, \alpha_N = 20$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 0$.

L'equazione Hamiltoniana del sistema considerato è:

$$H(k) = \frac{1}{2}(\alpha x(k)^2 + \beta u^2(k) + 2x(k)u(k)) + \lambda(k+1)\,[ax(k) + b(k)] \tag{1}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso tempo discreto sono:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = \alpha x(k) + u(k) + a\lambda(k+1), \qquad \lambda_N = \frac{\partial \beta(k)}{\partial x(k)}\Big|_{k=N} = \alpha_N(x_N - 1) \tag{2}$$

Dalla condizione di stazionarietà nel caso tempo discreto si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \beta u(k) + x(k) + b\lambda(k+1) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(k) = -\frac{1}{\beta}(x + b\lambda(k+1)) \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione di $u(k)$ ricavata dalla (3) nella (1) e nella (2) si ottiene:

$$x(k+1) = (a - \frac{b}{\beta})x(k) - \frac{b^2}{\beta}\lambda(k+1) \tag{4}$$

$$\lambda(k) = (\alpha - \frac{1}{\beta})x(k) + (a - \frac{b}{\beta})\lambda(k+1) \tag{5}$$

che riscritto in forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{b}{\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{1}{\beta} & a - \frac{b}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Questa espressione rappresenta il *sistema Hamiltoniano.* La (6) rappresenta un sistema autonomo la cui evoluzione a partire dal passo iniziale fino al k-esimo passo può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{b}{\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{1}{\beta} & a - \frac{b}{\beta} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{7}$$

Al passo N-esimo vale la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{b}{\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{1}{\beta} & a - \frac{b}{\beta} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{8}$$

Partizionando la A^N nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N11} & A_{N12} \\ A_{N21} & A_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

e sostituendo nella (9) la condizione su λ_N ricavata dalla (2), considerando che i termini A_{Nij} sono tutti coefficienti scalari, si può ricarave l'epressione di x_N in funzione delle condizioni iniziali:

$$x_N = \frac{A_{N11}\,x_0 - 2\,A_{N12}\,\alpha_N}{1 - A_{N12}\,\alpha_N} \tag{10}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$x(3) = 0.38$$