Cognome, Nome, N. Matr.: ______________________________

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 25 Marzo 2009

1. Un pendolo con attrito viscoso non lineare è descritto dalla seguente equazione

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - bl\dot{\theta}^3$$

dove m, g, l, b sono costanti positive, e θ l'angolo fra il pendolo e il vettore di forza di gravità. Si consideri θ limitato al dominio $\theta \in (-\pi, \pi]$.

   a) Scrivere il modello in forma di stato con variabili di stato $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$;

   b) Trovare i due punti di equilibrio.

   c) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio eventualmente utilizzando la funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta)$$

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;

   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;

   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;

   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [6\ \ 3\ \ 1\ \ 1]^T$ ed in quanti passi, considerando solo l'evoluzione libera del sistema;

   c) Determinare se è possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [6\ \ 3\ \ 1\ \ 1]^T$ considerando solo l'evoluzione forzata e determinare il minimo numero di passi necessari per raggiungere tale stato;

   d) Determinare, se esistono, la serie di ingressi $u(k)$ che consentono di raggiungere in un numero minimo di passi lo stato $x_f = [6\ \ 3\ \ 1\ \ 1]^T$, partendo da condizione iniziale $x_0 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;

   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

   c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N(x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

   a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

   b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

   c) Ponendo $a = 1/3,\ b = 1/2,\ c = 5,\ \alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 4,\ \alpha_N = 10,\ x_d = 3$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 1$.

Cognome, Nome, N. Matr.: ______________________

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 25 Marzo 2009

1. Un pendolo con attrito viscoso non lineare è descritto dalla seguente equazione

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - bl\dot{\theta}^3$$

dove m, g, l, b sono costanti positive, e θ l'angolo fra il pendolo e il vettore di forza di gravità. Si consideri θ limitato al dominio $\theta \in (-\pi, \pi]$.

a) Scrivere il modello in forma di stato con variabili di stato $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$;

b) Trovare i due punti di equilibrio.

c) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio eventualmente utilizzando la funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta)$$

Soluzione

a) Il sistema in forma di stato è espresso dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{b}{m}x_2^3 \end{aligned}$$

b) i due punti di equilibrio sono

$$x_s = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio si può applicare il metodo di linearizzazione; la matrice Jacobiana del sistema è

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{3b}{m}x_2^2 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice $J(x_s)$ sono $\lambda = \pm\sqrt{l/g}$; il punto di equilibrio risulta quindi instabile.
Gli autovalori della matrice $J(x_i)$ sono $\lambda = \pm i\sqrt{l/g}$; essendo i due autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria non è possibile asserire la stabilità del sistema.
Si deve quindi procedere nel verificare che la funzione candidata, espressa nello spazio degli stati,

$$V(x) = \frac{m(lx_2)^2}{2} + mgl(1 - \cos x_1)$$

sia una funzione di Lyapnov; La funzione candidata è definita positiva nell'intorno dell'origine ed in particolare in tutto il dominio; la sua derivata temporale è:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= ml^2x_2\dot{x}_2 + mgl(\sin(x_1)\dot{x}_1) \\ &= -mgl\sin(x_1)x_2 - bl^2x_2^4 + mgl\sin(x_1)x_2 \\ &= -bl^2x_2^4 \end{aligned}$$

essendo $\dot{V}(x)$ definita negativa si può asserire la stabilità asintotica del punto.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;

b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;

c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

Per prima cosa si determina la matrice di raggiungibilità:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p = \lambda^3 - \lambda^2 - 10\lambda - 8$$

per cui la matrice P_c^{-1} risulta:

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$T = PP_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di controllo risulta quindi:

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico che si vuole assegnare al sistema è:

$$p_{des} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$K = K_cT^{-1} = \begin{bmatrix} -14 & -21 & -7 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -14 & -7 & -35 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;

b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [6 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 1]^T$ ed in quanti passi, considerando solo l'evoluzione libera del sistema;

c) Determinare se è possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [6 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 1]^T$ considerando solo l'evoluzione forzata e determinare il minimo numero di passi necessari per raggiungere tale stato;

d) Determinare, se esistono, la serie di ingressi $u(k)$ che consentono di raggiungere in un numero minimo di passi lo stato $x_f = [6 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 1]^T$, partendo da condizione iniziale $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$.

Soluzione

a) La matrice A presenta un autovalore di molteplicità algebrica 4 in $\lambda_{1,2,3,4} = 2$.
La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Jordan è:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A in forma di Jordan risulta quindi essere:

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) L'evoluzione libera del sistema è data da:

$$x(k) = TA_J^k T^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \\ 2^k \\ k2^{k-1} \\ \frac{k(k-1)(k-2)}{6} 2^{k-3} \end{bmatrix}$$

Lo stato finale $x_f = [6 \ \ 3 \ \ 1 \ \ 1]^T$ non è raggiungibile mediante evoluzione libera del sistema.

c) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad im(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo stato finale $x_f = [6 \ \ 3 \ \ 1 \ \ 1]^T$ è raggiungibile mediante evoluzione forzata del sistema, ma solo dal quarto passo in poi.

d) Considerando evoluzione libera e forzata, al passo k si ha:

$$x(k) = A^k x_0 + P_k \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

lo stato x_f è sicuramente raggiungibile al quarto passo, ma è anche raggiungibile al terzo passo, con sequenza di ingresso $u = [17 \quad -11 \ \ 0]$; per $k = 3$ si ha

$$x(k) = A^3 x_0 + P_3 \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava i valori della sequenza di ingresso.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;

b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 29 \\ -1 & 5 & -29 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow ker(Q) = (im(Q^T))^\perp = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q)$:

$$ker(A^3) = im((A^3)^T)^\perp = im\left(\begin{bmatrix} -177 & 177 & 53 \\ 0 & 0 & 0 \\ 212 & -212 & -71 \end{bmatrix}^T\right)^\perp = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \supseteq ker(Q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è quindi ricostruibile in 3 passi. Allo stesso modo, è possibile verificare che il sistema è ricostruibile anche in 2 passi ma non in 1 passo:

$$ker(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\supseteq ker(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove C è la matrice di osservabilità ad 1 passo.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = [im(Q^T) \;\; ker(Q)] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \; T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -5 & \frac{1}{2} & 0 \\ 8 & -3 & 0 \\ \hline -5 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asintoticamente stabile perché ha un autovalore in 0, pertanto è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato. Per garantire la massima velocità di convergenza, occorre progettare un osservatore che porti a zero gli autovalori della parte osservabile (osservatore dead beat). Segue che il polinomio desiderato è $p(\lambda) = \lambda^3$. Procedendo per allocazione diretta del polinomio caratteristico, si ha che

$$det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^3 \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} \alpha + 8 & \alpha & -13 \end{bmatrix}^T.$$

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N(x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

c) Ponendo $a = 1/3,\ b = 1/2,\ c = 5,\ \alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 4,\ \alpha_N = 10,\ x_d = 3$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 1$.

L'equazione Hamiltoniana del sistema considerato è:

$$H(k) = \frac{1}{2}(\alpha x(k)^2 + \beta u^2(k) + \gamma\, x(k)u(k)) + \lambda(k+1)\,[ax(k) + b(k)] \tag{1}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso tempo discreto sono:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = \alpha x(k) + \frac{\gamma}{2}\, u(k) + a\lambda(k+1), \qquad \lambda_N = \frac{\partial \beta(k)}{\partial x(k)}\Big|_{k=N} = \alpha_N(x_N - x_d) \tag{2}$$

Dalla condizione di stazionarietà nel caso tempo discreto si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \beta u(k) + \frac{\gamma}{2}\, x(k) + b\lambda(k+1) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(k) = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma}{2}\, x + b\lambda(k+1)\right) \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione di $u(k)$ ricavata dalla (3) nella (1) e nella (2) si ottiene:

$$x(k+1) = (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})x(k) - \frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta}\lambda(k+1) \tag{4}$$

$$\lambda(k) = (\alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta})x(k) + (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})\lambda(k+1) \tag{5}$$

che riscritto in forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Questa espressione rappresenta il *sistema Hamiltoniano.* La (6) rappresenta un sistema autonomo la cui evoluzione a partire dal passo iniziale fino al k-esimo passo può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{7}$$

Al passo N-esimo vale la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{8}$$

Partizionando la A^N nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N11} & A_{N12} \\ A_{N21} & A_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

e sostituendo nella (9) la condizione su λ_N ricavata dalla (2), considerando che i termini A_{Nij} sono tutti coefficienti scalari, si può ricarave l'epressione di x_N in funzione delle condizioni iniziali:

$$x_N = \frac{A_{N11}\, x_0 - x_d\, A_{N12}\, \alpha_N}{1 - A_{N12}\, \alpha_N} \tag{10}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$x(3) = 2.86$$