Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 15 Aprile 2009

1. Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\,x_1 - x_2^n\end{aligned}$$

si studi la stabilità del sistema nel suo punto di equilibrio al variare di n nei numeri interi non negativi. Si utilizzi, ove necessario, la funzione candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

2. Si consideri il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} u(t)\\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0]\; x(t)\end{aligned}$$

a) determinare la scomposizione canonica di Kalman del sistema e valutare la stabilità i.l.s.l. e i.l.u.l.;

b) progettare, se possibile, una retroazione dello stato tale che il sistema sia stabile e tra i modi del sistema controllato compaiano e^{-t} ed $t\,e^{-t}$. Motivare le scelte progettuali.

3. Si consideri il sistema lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix} u(k)$$

a) Si determinino i sottospazi di raggiungibilità del sistema dato per $k = 1, 2, \ldots$.

b) Si determinino i sottospazi di controllabilità del sistema dato per $k = 1, 2, \ldots$.

c) Si determini, ove possibile e al variare del parametro reale α, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato iniziale $x(0) = [1+\alpha \;\; 1 \;\; 1]^T$ in tempo minimo.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} u(k)\\ y(k) &= \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\end{bmatrix} x(k)\end{aligned}$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;

b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0\\ y(k) &= cx(k)\end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N (x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

c) Ponendo $a = 1/5,\ b = 1/4,\ c = 2,\ \alpha = 3,\ \beta = 1,\ \gamma = 2,\ \alpha_N = 20,\ x_d = 4$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 1$.

Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 15 Aprile 2009

1. Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^n\end{aligned}$$

si studi la stabilità del sistema nel suo punto di equilibrio al variare di n nei numeri interi non negativi. Si utilizzi, ove necessario, la funzione candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Soluzione

Soluzione

Il sistema, per $n = 0$, risulta un sistema lineare con i poli complessi coniugati, e per tanto marginalmente stabile.

Per $n = 1$ il sistema è lineare del secondo ordine, con smorzamento; il sistema è quindi asintoticamente stabile.

Per $n > 2$ il sistema è non lineare. Calcolando lo Jacobiano nel punto di equilibrio ($x = [0\ 0]^T$) si ottiene

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori a parte reale nulla. Non si può quindi assere nulla sulla stabilità del sistema. ricorrendo alla funzione candidata e calcolandone la derivata temporale si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) =& x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2\\ =& -x_2^{n+1}\end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ è definita negativa per n dispari, e l'origine risulta quindi stabile. Nel caso di n pari questa funzione candidata non permette di asserire la stabilità o l'instabilità.

2. Si consideri il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0]\ x(t)\end{aligned}$$

   a) determinare la scomposizione canonica di Kalman del sistema e valutare la stabilità i.l.s.l. e i.l.u.l.;
   b) progettare, se possibile, una retroazione dello stato tale che il sistema sia stabile e tra i modi del sistema controllato compaiano e^{-t} ed $t\,e^{-t}$. Motivare le scelte progettuali.

Soluzione

   a) La matrice di raggiungibilità è:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad im(P) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di osservabilità $Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T \end{bmatrix}$ è:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice T della scomposizione di Kalman risulta:

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \; T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Per cui:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{C} = CT = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Il sottospazio degli stati raggiungibili e osservabili è vuoto (A_{22} non esiste): il sistema risulta stabile i.l.u.l..

Gli autovalori della parte raggiungibile (A_{11}) sono $\lambda = 2$: il sistema non risulta stabile i.l.s.l..

b) Si osserva che l'autovalore $\lambda = 2$ si trova nel sottospazio raggiungibile: il sistema risulta quindi stabilizzabile.

Al fine di realizzare la retroazione dello stato desiderata occorre imporre gli autovalori di $A + BK$ in modo tale che il sistema sia stabile. Gli autovalori della parte non raggiungibile generano già i modi richiesti, quindi è sufficiente imporre un modo stabile per la parte raggiungibile.

Si può procedere mediante un assegnamento diretto degli autovalori. Ponendo l'autovalore della parte raggiungibile pari a -2, la matrice di retroazione dello stato è:

$$K = [0 \;\; 0 \;\; -4]$$

3. Si consideri il sistema lineare tempo discreto:

$$x(k+1) \;\; = \;\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

a) Si determinino i sottospazi di raggiungibilità del sistema dato per $k = 1, 2, ...$

b) Si determinino i sottospazi di controllabilità del sistema dato per $k = 1, 2, ...$

c) Si determini, ove possibile e al variare del parametro reale α, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato iniziale $x(0) = [1 + \alpha \;\; 1 \;\; 1]^T$ in tempo minimo.

Soluzione

a) La matrice di raggiungibilità è:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \\ 2 & 12 & 8 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad im(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \rho(P) = 2.$$

Il sistema non è completamente raggiungibile.

b) Per studiare la controllabilità del sistema occorre verificare che:

$$Im(A) = Im\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \not\subseteq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Im(B)$$

il sistema non è controllabile in un passo.

$$Im(A^2) = Im\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Im([B \;\; AB])$$

il sistema è controllabile in due passi e di conseguenza in tre passi.

c) Essendo il sistema controllabile in due passi, è possibile trovare la sequenza di ingresso che porti il sistema a zero in due passi a partire dall'istante inziale $x(0)$.
Si ha:

$$x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A^2 x(0) + [B \ \ AB] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;
b) Studiare la ricostruibilità del sistema;
c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -14 \\ 0 & 3 & -12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow ker(Q) = (im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q)$:

$$ker(A^3) = im((A^3)^T)^{\perp} = im\left(\begin{bmatrix} -26 & 52 & 45 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15 & -30 & -26 \end{bmatrix}^T\right)^{\perp} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \supseteq ker(Q) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è quindi ricostruibile in 3 passi. Allo stesso modo, è possibile verificare che il sistema è ricostruibile anche in 2 passi ma non in 1 passo:

$$ker(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\supseteq ker(C) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove C è la matrice di osservabilità ad 1 passo.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = [im(Q^T) \ \ ker(Q)] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \; T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & \frac{3}{5} & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ \hline -4 & \frac{6}{5} & 0 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asintoticamente stabile perché ha un autovalore in 0, pertanto è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato. Per garantire la massima velocità di convergenza, occorre progettare un osservatore che porti a zero gli autovalori della parte osservabile (osservatore dead beat). Segue che il polinomio desiderato è $p(\lambda) = \lambda^3$. Procedendo per allocazione diretta del polinomio caratteristico, si ha che

$$det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^3 \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 2\,\alpha + 4 & \alpha & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}^T.$$

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N (x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

c) Ponendo $a = 1/5,\ b = 1/4,\ c = 2,\ \alpha = 3,\ \beta = 1,\ \gamma = 2,\ \alpha_N = 20,\ x_d = 4$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 1$.

Soluzione

L'equazione Hamiltoniana del sistema considerato è:

$$H(k) = \frac{1}{2}(\alpha x(k)^2 + \beta u^2(k) + \gamma\, x(k) u(k)) + \lambda(k+1)\,[ax(k) + b(k)] \tag{1}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso tempo discreto sono:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = \alpha x(k) + \frac{\gamma}{2}\, u(k) + a\lambda(k+1), \qquad \lambda_N = \frac{\partial \beta(k)}{\partial x(k)}\Big|_{k=N} = \alpha_N (x_N - x_d) \tag{2}$$

Dalla condizione di stazionarietà nel caso tempo discreto si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \beta u(k) + \frac{\gamma}{2}\, x(k) + b\lambda(k+1) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(k) = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma}{2}\, x + b\lambda(k+1)\right) \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione di $u(k)$ ricavata dalla (3) nella (1) e nella (2) si ottiene:

$$x(k+1) = (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})x(k) - \frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta}\lambda(k+1) \tag{4}$$

$$\lambda(k) = (\alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta})x(k) + (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})\lambda(k+1) \tag{5}$$

che riscritto in forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Questa espressione rappresenta il *sistema Hamiltoniano*. La (6) rappresenta un sistema autonomo la cui evoluzione a partire dal passo iniziale fino al k-esimo passo può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{7}$$

Al passo N-esimo vale la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{\gamma\, b^2}{2\,\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{8}$$

Partizionando la A^N nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N11} & A_{N12} \\ A_{N21} & A_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

e sostituendo nella (9) la condizione su λ_N ricavata dalla (2), considerando che i termini A_{Nij} sono tutti coefficienti scalari, si può ricarave l'epressione di x_N in funzione delle condizioni iniziali:

$$x_N = \frac{A_{N11}\, x_0 - x_d\, A_{N12}\, \alpha_N}{1 - A_{N12}\, \alpha_N} \tag{10}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$x(3) = -0.67$$