Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 17 Giugno 2009

1. Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + x^3 = 0$$

   a) Esprimere il sistema in forma di stato, e determinare il punto di equilibrio.
   b) Verificare la stabilità del sistema con il metodo indiretto di Lyapunov.
   c) Determinare i valori di α e β affichè la funzione candidata

$$V(x, \dot{x}) = \alpha x^4 + \beta \dot{x}^2$$

   sia una funzione di Lyapunov.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -20 & -13 & -8 \\ 20 & 12 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;
   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;
   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0\ \ 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [1\ \ 1]^T$ con l'ausilio dell'ingresso;
   c) Scrivere l'evoluzione temporale dello stato e dell' uscita per $x_0 = [1\ \ 1]^T$ ed ingresso nullo.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;
   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;
   c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

   Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N (x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

   a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;
   b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;
   c) Ponendo $a = 1/3,\ b = 1,\ c = 4,\ \alpha = 1/4,\ \beta = 1/2,\ \gamma = 1,\ \alpha_N = 10,\ x_d = 4$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 2$.

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 17 Giugno 2009

1. Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + x^3 = 0$$

   a) Esprimere il sistema in forma di stato, e determinare il punto di equilibrio.
   b) Verificare la stabilità del sistema con il metodo indiretto di Lyapunov.
   c) Determinare i valori di α e β affichè la funzione candidata

$$V(x, \dot{x}) = \alpha x^4 + \beta \dot{x}^2$$

   sia una funzione di Lyapunov.

Soluzione

   a) Il sistema in forma di stato, scegliendo $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, è espresso dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2^3 \end{aligned}$$

   il cui punto di equilibrio è $x = [0, 0]$

   b) Per applicare il metodo indiretto si ricava la matrice Jacobiana e si valuta i suoi autovalori nel punto di equilibrio. la matrice Jacobiana del sistema è

$$J(x)|_{[0\,0]} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix}\right|_{[0\,0]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   i cui due autovalori sono nulli.Non è possibile asserire la stabilità del sistema.

   c) Si deve quindi procedere nel verificare che la funzione candidata, espressa nello spazio degli stati,

$$V(x) = \alpha x_1^4 + \beta x_2^2$$

   La derivata temporale è

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\alpha}{4} x_1^3 \dot{x}_1 + \frac{\beta}{2} x_2 \dot{x}_2 \\ &= \frac{\alpha}{4} x_1^4 x_2 + \frac{\beta}{2} x^2 (-x_1^3 - x_2^3) \\ &= x_1 x_2 \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} \right) - \frac{\beta}{2} (-x_2^4) \end{aligned}$$

   Affinchè $\dot{V}(x)$ sia semidefinita negativa devono essere verificate

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{4} - \dfrac{\beta}{2} = 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

   Quindi il sistema è stabile; non è possibile asserire la asintotica stabilità

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -20 & -13 & -8 \\ 20 & 12 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;
   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;
   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

Soluzione

Per prima cosa si determina la matrice di raggiungibilità:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -44 \\ 1 & -8 & 53 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 11\lambda - 20$$

per cui la matrice P_c^{-1} risulta:

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$T = PP_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di controllo risulta quindi:

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & -11 & -8 \end{bmatrix} \qquad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico che si vuole assegnare al sistema è:

$$p_{des} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$K = K_cT^{-1} = \begin{bmatrix} -26 & 0 & 2 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -26 & -24 & -26 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0 \;\; 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [1 \;\; 1]^T$ con l'ausilio dell'ingresso;
   c) Scrivere l'evoluzione temporale dello stato e dell' uscita per $x_0 = [1 \;\; 1]^T$ ed ingresso nullo.

Soluzione

a) La matrice A due autovalori: $\lambda_1 = 0$, e $\lambda_2 = -3$.
La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Jordan è:

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

La matrice A in forma di Jordan risulta quindi essere:

$$A_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) La matrice di controllabilità è:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

da cui si deduce che il sistema non può raggiungere lo stato $x_f = [1 \ \ 1]^T$ partendo dall'origine.

b) L'evoluzione libera del sistema è data da:

$$\begin{aligned} x(t) &= Te^{A_j t}T^{-1}x_0 = T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} T^{-1}x_0 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}+\frac{5}{3}e^{-3t} & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{5}{3}-\frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L' evoluzione dell'uscita è:

$$y(t) = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}e^{-3t}$$

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;

b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

c) Progettare, se possibile, un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow ker(Q) = (im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q)$:

$$ker(A^3) = im((A^3)^T)^{\perp} = im\left(\begin{bmatrix} 16 & -32 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & -32 & 16 \end{bmatrix}^T\right)^{\perp} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \supseteq ker(Q) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è quindi ricostruibile in 3 passi. Allo stesso modo, è possibile verificare che il sistema è ricostruibile anche in 2 passi ma non in 1 passo:

$$ker(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\supseteq ker(C) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove C è la matrice di osservabilità ad 1 passo.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = [im(Q^T) \ \ ker(Q)] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \hline \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 10 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -2 & 0 \\ \hline \frac{4}{5} & -4 & 0 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asintoticamente stabile perché ha un autovalore in 0, pertanto è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato. Per garantire la massima velocità di convergenza, occorre progettare un osservatore che porti a zero gli autovalori della parte osservabile (osservatore dead beat). Segue che il polinomio desiderato è $p(\lambda) = \lambda^3$. Procedendo per allocazione diretta del polinomio caratteristico, si ha che

$$det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^3 \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 2\,\alpha + 4 & \alpha & 0 \end{bmatrix}^T.$$

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N(x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;
b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;
c) Ponendo $a = 1/3,\ b = 1,\ c = 4,\ \alpha = 1/4,\ \beta = 1/2,\ \gamma = 1,\ \alpha_N = 10,\ x_d = 4$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 2$.

Soluzione

L'equazione Hamiltoniana del sistema considerato è:

$$H(k) = \frac{1}{2}(\alpha x(k)^2 + \beta u^2(k) + \gamma\, x(k)u(k)) + \lambda(k+1)\,[ax(k) + bu(k)] \tag{1}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso tempo discreto sono:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = \alpha x(k) + \frac{\gamma}{2}u(k) + a\lambda(k+1), \qquad \lambda_N = \frac{\partial \beta(k)}{\partial x(k)}\Big|_{k=N} = \alpha_N(x_N - x_d) \tag{2}$$

Dalla condizione di stazionarietà nel caso tempo discreto si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \beta u(k) + \frac{\gamma}{2}x(k) + b\lambda(k+1) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(k) = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma}{2}x + b\lambda(k+1)\right) \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione di $u(k)$ ricavata dalla (3) nella (1) e nella (2) si ottiene:

$$x(k+1) = (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})x(k) - \frac{b^2}{\beta}\lambda(k+1) \tag{4}$$

$$\lambda(k) = (\alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta})x(k) + (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})\lambda(k+1) \tag{5}$$

che riscritto in forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Questa espressione rappresenta il *sistema Hamiltoniano*. La (6) rappresenta un sistema autonomo la cui evoluzione a partire dal passo iniziale fino al k-esimo passo può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{7}$$

Al passo N-esimo vale la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{8}$$

Partizionando la A^N nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N11} & A_{N12} \\ A_{N21} & A_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

e sostituendo nella (9) la condizione su λ_N ricavata dalla (2), considerando che i termini A_{Nij} sono tutti coefficienti scalari, si può ricarave l'epressione di x_N in funzione delle condizioni iniziali:

$$x_N = \frac{A_{N11}\, x_0 - x_d\, A_{N12}\, \alpha_N}{1 - A_{N12}\, \alpha_N} \tag{10}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$x(3) = 3.82$$