Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 14 Luglio 2009

1. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 - x_1^3\\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - \alpha\, x_2\end{aligned}$$

   Al variare di α,

   a) Verificare la stabilità del sistema con il metodo indiretto di Lyapunov.

   b) Verificare che la funzione candidata

   $$V(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4}$$

   sia una funzione di Lyapunov per il sistema

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -13 & 6 \\ 6 & 12 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;

   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;

   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;

   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0 \ \ 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [1 \ \ 1]^T$ con l'ausilio dell'ingresso;

   c) Scrivere l'evoluzione temporale dello stato e dell' uscita per $x_0 = [1 \ \ 1]^T$ ed ingresso nullo.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;

   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

   c) Progettare un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

   Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N (x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

   a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

   b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

   c) Ponendo $a = 1/5,\ b = 1/3,\ c = 2,\ \alpha = 1/2,\ \beta = 1/6,\ \gamma = 1,\ \alpha_N = 20, x_d = 0$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 3$.

Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 14 Luglio 2009

1. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 - x_1^3\\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - \alpha\, x_2\end{aligned}$$

Al variare di α,

a) Verificare la stabilità del sistema con il metodo indiretto di Lyapunov.

b) Verificare che la funzione candidata

$$V(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4}$$

sia una funzione di Lyapunov per il sistema

Soluzione

a) Per applicare il metodo indiretto si ricava l punto di equilibrio del sistema $x_e = [0, 0]$, e la matrice Jacobiana J. dopodichè si valuta gli autovalori di J nel punto di equilibrio. la matrice Jacobiana del sistema è

$$J(x)|_{[0\,0]} = \begin{bmatrix}-3x_1^2 & 3x_2^2\\ -3x_1^2 & -\alpha\end{bmatrix}\Bigg|_{[0\,0]} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}$$

i cui due autovalori sono 0 e$-\alpha$; nel caso in cui α sia negativo il sistema è instabile.

c) Si deve quindi procedere nel verificare che la funzione candidata

$$V(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4}$$

sia una funzione di Lyapunov. La derivata temporale è

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1^3\dot{x}_1 + x_2^3\dot{x}_2\\ &= x_1^3(x_2^3 - x_1^3) + x_2^3(-x_1^3 - \alpha\, x_2)\\ &= -x_1^6 - x_2^4\,\alpha\end{aligned}$$

Nel caso $\alpha < 0$ il sistema è stabile; se $\alpha = 0$ il sistema è stabile non asintoticamente.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}-6 & -13 & 6\\ 6 & 12 & -5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} u(t)$$

a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;

b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;

c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

Per prima cosa si determina la matrice di raggiungibilità:

$$P = \begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -7 & -30\\ 1 & 6 & 25\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p = \lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda - 6$$

per cui la matrice P_c^{-1} risulta:

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 1\\ \alpha_2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & -6 & 1\\ -6 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$T = PP_c^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad T^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di controllo risulta quindi:

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico che si vuole assegnare al sistema è:

$$p_{des} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$K = K_c T^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -12 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & -24 & -12 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0 \;\; 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [1 \;\; 1]^T$ con l'ausilio dell'ingresso;
   c) Scrivere l'evoluzione temporale dello stato e dell' uscita per $x_0 = [1 \;\; 1]^T$ ed ingresso nullo.

Soluzione

a) La matrice A ha due autovalori coincidenti: $\lambda_1 = -2$. la molteplicità algebrica di λ_1 è

$$\nu_1 = \dim(\ker(A - 2I)) = 1$$

All'autovalore λ_1 è associato un autovettore $v_{1,1}$ ed autovettore generalizzato $x_{1,1,1}$, da cui risulta

$$A \begin{bmatrix} v_{1,1} & x_{1,1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & x_{1,1,1} \end{bmatrix} A_J = \begin{bmatrix} v_{1,1} & x_{1,1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Jordan è:

$$T = \begin{bmatrix} v_{1,1} & x_{1,1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) La matrice di controllabilità è:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno; quindi il sistema è raggiungibile e controllabile a zero.

b) L'evoluzione libera del sistema dallo stato x_0 è data da:

$$x(t) = Te^{A_j t}T^{-1}x_0 = T \begin{bmatrix} e^{-2t} & t\,e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} T^{-1}x_0$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2\,te^{-2\,t} + e^{-2\,t} & -1/2\,te^{-2\,t} \\ 1/2\,te^{-2\,t} & e^{-2\,t} + 1/2\,te^{-2\,t} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} -te^{-2\,t} + e^{-2\,t} \\ te^{-2\,t} + e^{-2\,t} \end{bmatrix}$$

L' evoluzione dell'uscita è:

$$y(t) = -2t\,e^{-2t}$$

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;
   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;
   c) Progettare un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow ker(Q) = (im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q)$; poiché $ker(A^k) = \{0\}$ il sistema non è ricostruibile.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = \begin{bmatrix} \text{imm}(Q^T) & \text{ker}(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = T^{-1}$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asintoticamente stabile perché ha un autovalore in 0.5, pertanto è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato. Per garantire la massima velocità di convergenza, occorre progettare un osservatore che porti a zero gli autovalori della parte osservabile. Segue che il polinomio desiderato è $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1/2)$. Procedendo per allocazione diretta del polinomio caratteristico, si ha che

$$det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^2(\lambda - 1/2) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1/2 = 1/2 \\ -5/2 + 1/2\, l_1 + 1/2\sqrt{17 + 2\, l_1 + {l_1}^2 + 4\, l_3} = 0 \\ -5/2 + 1/2\, l_1 - 1/2\sqrt{17 + 2\, l_1 + {l_1}^2 + 4\, l_3} = 0 \end{cases}$$

da cui L$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 13 \end{bmatrix}^T$.

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N(x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

c) Ponendo $a = 1/5,\ b = 1/3,\ c = 2,\ \alpha = 1/2,\ \beta = 1/6,\ \gamma = 1,\ \alpha_N = 20,\ x_d = 0$ si determini lo stato finale x_N del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 3$.

L'equazione Hamiltoniana del sistema considerato è:

$$H(k) = \frac{1}{2}(\alpha x(k)^2 + \beta u^2(k) + \gamma\, x(k)u(k)) + \lambda(k+1)\,[ax(k) + bu(k)] \tag{1}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso tempo discreto sono:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = \alpha x(k) + \frac{\gamma}{2}\,u(k) + a\lambda(k+1), \qquad \lambda_N = \frac{\partial \beta(k)}{\partial x(k)}\Big|_{k=N} = \alpha_N(x_N - x_d) \tag{2}$$

Dalla condizione di stazionarietà nel caso tempo discreto si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \beta u(k) + \frac{\gamma}{2}\,x(k) + b\lambda(k+1) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(k) = -\frac{1}{\beta}\Big(\frac{\gamma}{2}\,x + b\lambda(k+1)\Big) \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione di $u(k)$ ricavata dalla (3) nella (1) e nella (2) si ottiene:

$$x(k+1) \;=\; (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})x(k) - \frac{b^2}{\beta}\lambda(k+1) \tag{4}$$

$$\lambda(k) \;=\; (\alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta})x(k) + (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})\lambda(k+1) \tag{5}$$

che riscritto in forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Questa espressione rappresenta il *sistema Hamiltoniano*. La (6) rappresenta un sistema autonomo la cui evoluzione a partire dal passo iniziale fino al k-esimo passo può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{7}$$

Al passo N-esimo vale la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{8}$$

Partizionando la A^N nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N11} & A_{N12} \\ A_{N21} & A_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

e sostituendo nella (9) la condizione su λ_N ricavata dalla (2), considerando che i termini A_{Nij} sono tutti coefficienti scalari, si può ricarave l'epressione di x_N in funzione delle condizioni iniziali:

$$x_N = \frac{A_{N11}\, x_0 - x_d\, A_{N12}\, \alpha_N}{1 - A_{N12}\, \alpha_N} \tag{10}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$x(3) = -0.178$$