Cognome, Nome, N. Matr.:

# Controlli Automatici LS - INF

Compito del 1 Settembre 2009

1. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\sin\, x_1 + \sin\, x_2 - u \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - k\, x_2 \end{cases}$$

   a) linearizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio $x_{eq} = [0 \;\; 0]^T$;

   b) studiare la stabilità del sistema nell'intorno di $x_{eq}$ al variare del parametro $k$.

2. Si consideri il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0]\; x(t) \end{aligned}$$

   a) si studi la raggiungibilità, l'osservabilità e la scomposizione di Kalman del sistema;

   b) si studi la stabilità i.l.s.l. e i.l.u.l. del sistema;

   c) si realizzi un osservatore asintotico dello stato in modo tale che fra i modi dell'errore di stima compaiano $e^{-t}$, $e^{-2t}$ e $e^{-3t}$;

3. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo ad un ingresso ed una uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo;

   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllo;

   c) Progettare la matrice di retroazione dello stato che assegna al sistema chiuso in retroazione gli autovalori $[-1,\; -2,\; -3]$.

4. Si consideri il sistema lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

   a) Si determinino i sottospazi di raggiungibilità del sistema dato per $k = 1, 2, \ldots.$

   b) Si determinino i sottospazi di controllabilità del sistema dato per $k = 1, 2, \ldots.$

   c) Si determini, ove possibile e al variare del parametro reale $\alpha$, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato iniziale $x(0) = [1+\alpha \;\; 1 \;\; 1]^T$ in tempo minimo.

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

   Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N (x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

   a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

   b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

   c) Ponendo $a = 1/4,\; b = 1/2,\; c = 2,\; \alpha = 1,\; \beta = 1/5,\; \gamma = 2,\; \alpha_N = 10,\; x_d = 4$ si determini lo stato finale $x_N$ del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 1$.

Cognome, Nome, N. Matr.:

# Controlli Automatici LS - INF

Compito del 1 Settembre 2009

1. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\sin\ x_1 + \sin\ x_2 - u \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - k\ x_2 \end{cases}$$

   a) linearizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio $x_{eq} = [0\ \ 0]^T$;

   b) studiare la stabilità del sistema nell'intorno di $x_{eq}$ al variare del parametro $k$.

**Soluzione**

   a) Per linearizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio $x_{eq}$, occorre costruire i due Jacobiani $J_x$ e $J_u$ e valutarli in $x_{eq}$:

$$J_x = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{x_{eq}} = \left. \begin{bmatrix} -\cos\ x_1 & \cos\ x_2 \\ x_2 & x_1 - k \end{bmatrix} \right|_{x_{eq}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$J_u = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \right|_{x_{eq}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ risulta pertanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

   b) Per studiare la stabilità con il metodo di linearizzazione di Lyapunov occorre osservare gli autovalori della matrice dinamica del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio, ossia gli autovalori dello Jacobiano $J_x$.
   Il determinante dello Jacobiano è:

$$det(\lambda\ I - J_x) = (\lambda + 1)(\lambda + k)$$

   Gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -k$$

   Al variare del parametro $k$, si può osservare che:

   - $k = 0$: non si può dire nulla con il metodo di linearizzazione di Lyapunov;
   - $k > 0$: il sistema è *asintoticamente stabile*;
   - $k < 0$: il sistema è *instabile*.

2. Si consideri il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1\ \ 0\ \ 0]\ x(t) \end{aligned}$$

   a) si studi la raggiungibilità, l'osservabilità e la scomposizione di Kalman del sistema;

   b) si studi la stabilità i.l.s.l. e i.l.u.l. del sistema;

   c) si realizzi un osservatore asintotico dello stato in modo tale che fra i modi dell'errore di stima compaiano $e^{-t}$, $e^{-2t}$ e $e^{-3t}$;

**Soluzione**

   a) Si calcoli la matrice di raggiugibilità $P = \left[B\ AB\ A^2B\right]$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui, lo spazio di raggiungibilità è:

$$im(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calcoli la matrice di osservabilità $Q^T = \left[C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T\right]$:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

il sistema risulta completamente osservabile per cui lo spazio di inosservabilità risulta vuoto:

$$(im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $T$ della scomposizione di Kalman risulta:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per cui:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{C} = CT = [0 \quad 1 \quad 0]$$

b) Il sistema risulta instabile sia i.l.s.l. che i.l.u.l. a causa di un autovalore positivo nella parte raggiungibile ed osservabile.

c) Dal momento che il sistema risulta completamente osservabile, si possono assegnare 3 autovalori a scelta. Al fine di stabilizzare il sistema occorre imporre 3 autovalori negativi. In questa soluzione si scelgono gli autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -3$. Bisogna allocare 3 autovalori distinti dal momento che sono distinti anche nella matrice $A$ originaria. Si procede al progetto per dualità, in cui $A = A^T$ e $B = C^T$.

Il sistema in forma canonica del controllo ha matrici $A_c$ e $B_c$ così definite:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

essendo $q_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2$ il polinomio caratteristico della matrice A.
La matrice di raggiungibilità del sistema duale ẽ $P_{duale} = \left[C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T\right] = Q^T$:

$$P_{duale} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione $T$ che permette di passare dal sistema originario al sistema in forma canonica del controllo è data da:

$$\begin{aligned} T &= P_{duale} \, P_c^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è:

$$\begin{aligned} q_d(\lambda) &= (\lambda + 1)\,(\lambda + 2)\,(\lambda + 3) \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \end{aligned}$$

La retroazione dello stato del sistema in forma canonica del controllo è data:

$$\begin{aligned} K_c^T &= [-2-6 \quad -1-11 \quad 2-6] \\ &= [-8 \quad -12 \quad -4] \end{aligned}$$

La matrice di retroazione dello stato del sistema originario è data da:

$$K^T = K_c^T\, T^{-1} = [-4 \quad -4 \quad 0]$$

Tornando al sistema originario si ricava la matrice $L$ dell'osservatore dello stato che risulta pertanto:

$$L = [-4 \quad -4 \quad 0]$$

Più semplicemente gli autovalori si potevano allocare direttamente, imponendo che il determinante della matrice $det(A{+}LC)$, con $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$, fosse uguale al polinomio caratteristico desiderato.

3. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo ad un ingresso ed una uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo;
   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllo;
   c) Progettare la matrice di retroazione dello stato che assegna al sistema chiuso in retroazione gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

**Soluzione**

Per prima cosa si determina la matrice di raggiungibilità:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

per cui la matrice $R^{-1}$ risulta:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$T = PR^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di controllo risulta quindi:

$$\begin{aligned} A_c = T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B_C = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_c = CT &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico che si vuole assegnare al sistema è:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$K = K_cT^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -11 & -3 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Si consideri il sistema lineare tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

a) Si determinino i sottospazi di raggiungibilità del sistema dato per $k = 1, 2, ....$

b) Si determinino i sottospazi di controllabilità del sistema dato per $k = 1, 2, ....$

c) Si determini, ove possibile e al variare del parametro reale $\alpha$, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato iniziale $x(0) = [1+\alpha \;\; 1 \;\; 1]^T$ in tempo minimo.

**Soluzione**

a) La matrice di raggiungibilità è:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \\ 2 & 12 & 8 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad im(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \rho(P) = 2.$$

Il sistema non è completamente raggiungibile.

b) Per studiare la controllabilità del sistema occorre verificare che:

$$Im(A) = Im\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \not\subseteq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Im(B)$$

il sistema non è controllabile in un passo.

$$Im(A^2) = Im\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Im([B \;\; AB])$$

il sistema è controllabile in due passi e di conseguenza in tre passi.

c) Essendo il sistema controllabile in due passi, è possibile trovare la sequenza di ingresso che porti il sistema a zero in due passi a partire dallo stato inziale $x(0)$.
Si ha:

$$x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A^2 x(0) + [B \;\; AB] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

5. Si consideri il sistema tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + bu(k), \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

Dato l'indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}\alpha_N (x_N - x_d)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \left(\alpha\, x^2(k) + \beta\, u^2(k) + \gamma\, x(k)\, u(k)\right)$$

a) Si scriva la funzione Hamiltoniana;

b) Si determini la matrice dinamica del sistema Hamiltoniano;

c) Ponendo $a = 1/4,\ b = 1/2,\ c = 2,\ \alpha = 1,\ \beta = 1/5,\ \gamma = 2,\ \alpha_N = 10,\ x_d = 4$ si determini lo stato finale $x_N$ del sistema chiuso in retroazione ottima al passo $N = 3$ partendo dallo stato iniziale $x_0 = 1$.

**Soluzione**

L'equazione Hamiltoniana del sistema considerato è:

$$H(k) = \frac{1}{2}(\alpha x(k)^2 + \beta u^2(k) + \gamma\, x(k)u(k)) + \lambda(k+1)\,[a x(k) + b u(k)] \tag{1}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso tempo discreto sono:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = \alpha x(k) + \frac{\gamma}{2}\,u(k) + a\lambda(k+1), \qquad \lambda_N = \frac{\partial \beta(k)}{\partial x(k)}\Big|_{k=N} = \alpha_N(x_N - x_d) \tag{2}$$

Dalla condizione di stazionarietà nel caso tempo discreto si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \beta u(k) + \frac{\gamma}{2}\,x(k) + b\lambda(k+1) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(k) = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma}{2}\,x + b\lambda(k+1)\right) \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione di $u(k)$ ricavata dalla (3) nella (1) e nella (2) si ottiene:

$$x(k+1) \;=\; (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})x(k) - \frac{b^2}{\beta}\lambda(k+1) \tag{4}$$

$$\lambda(k) \;=\; (\alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta})x(k) + (a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta})\lambda(k+1) \tag{5}$$

che riscritto in forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Questa espressione rappresenta il *sistema Hamiltoniano*. La (6) rappresenta un sistema autonomo la cui evoluzione a partire dal passo iniziale fino al $k$-esimo passo può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{7}$$

Al passo $N$-esimo vale la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} & -\frac{b^2}{\beta} \\ \alpha - \frac{\gamma^2}{4\,\beta} & a - \frac{\gamma\, b}{2\,\beta} \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{8}$$

Partizionando la $A^N$ nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N11} & A_{N12} \\ A_{N21} & A_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

e sostituendo nella (9) la condizione su $\lambda_N$ ricavata dalla (2), considerando che i termini $A_{Nij}$ sono tutti coefficienti scalari, si può ricarave l'epressione di $x_N$ in funzione delle condizioni iniziali:

$$x_N = \frac{A_{N11}\, x_0 - x_d\, A_{N12}\, \alpha_N}{1 - A_{N12}\, \alpha_N} \tag{10}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$x(3) = 3.81$$