Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 17 dicembre 2009

1. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 - x_1^3\\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

   a) Identificare il punto di equilibrio.
   b) Verificare la stabilità del sistema con il metodo indiretto di Lyapunov nel punto di equilibrio.
   c) Verificare che la funzione candidata
   $$V(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4}$$
   sia una funzione di Lyapunov per il sistema nel punto di equilibrio.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1\\ -3 & 0 & -1\\ 1 & 0.5 & 1\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.5\\ 1\\ -0.5\end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;
   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;
   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2.5 & -0.5 & 1\\ 0.5 & -1.5 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} u(t)\\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\end{bmatrix} x\end{aligned}$$

   a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
   b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0\ \ 0\ \ 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [1\ \ 1\ \ 1]^T$ con l'ausilio dell'ingresso;
   c) Scrivere l'evoluzione temporale dello stato e dell' uscita per $x_0 = [0\ \ 0\ \ 1]^T$ ed ingresso nullo.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} u(k)\\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\end{bmatrix} x(k)\end{aligned}$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;
   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;
   c) Progettare un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0\\ -1\end{bmatrix} u(t)$$

   Si progetti la legge di controllo $u(t)$ a minima energia tale per cui nell'intervallo di tempo $[t_0\ \ t_f] = [0\ \ 1s]$ lo stato del sistema sia passato $x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0$ a $x_1(t_f) = \frac{1}{2},\ x_2(t_f) = 0$.

Cognome, Nome, N. Matr.:

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 17 dicembre 2009

1. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 =& x_2^3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 =& -x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

   a) Identificare il punto di equilibrio.

   b) Verificare la stabilità del sistema con il metodo indiretto di Lyapunov nel punto di equilibrio.

   c) Verificare che la funzione candidata
   $$V(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4}$$
   sia una funzione di Lyapunov per il sistema nel punto di equilibrio.

Soluzione

   a) Per applicare il metodo indiretto si ricava l punto di equilibrio del sistema $x_e = [0, 0]$, e la matrice Jacobiana J. dopodichè si valuta gli autovalori di J nel punto di equilibrio. la matrice Jacobiana del sistema è
   $$J(x)|_{[0\,0]} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}\Bigg|_{[0\,0]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
   i cui due autovalori sono 0 e -1; non si può dedurre alcuna conclusione sula stabità del sistema

   c) Si deve quindi procedere nel verificare che la funzione candidata
   $$V(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4}$$
   sia una funzione di Lyapunov. La derivata temporale è
   $$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1^3\dot{x}_1 + x_2^3\dot{x}_2 \\ &= x_1^3(x_2^3 - x_1^3) + x_2^3(-x_1^3 - 1\,x_2) \\ &= -x_1^6 - x_2^4\end{aligned}$$
   La funzione candidata è una funzione di Lyapunov, e il sistema è stabile nell' intorno del punto di equilibrio.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;

   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;

   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-1,\ -2,\ -3]$.

Per prima cosa si determina la matrice di raggiungibilità:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p = \lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda + 2$$

per cui la matrice P_c^{-1} risulta:

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$T = PP_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di controllo risulta quindi:

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico che si vuole assegnare al sistema è:

$$p_{des} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$K = K_c T^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -12 & -8 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -12 & -16 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2.5 & -0.5 & 1 \\ 0.5 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

a) Determinare la trasformazione T che porta il sistema in forma di Jordan;
b) Determinare, a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0\ \ 0\ \ 0]^T$, se sia possibile raggiungere lo stato finale $x_f = [1\ \ 1\ \ 1]^T$ con l'ausilio dell'ingresso;
c) Scrivere l'evoluzione temporale dello stato e dell' uscita per $x_0 = [0\ \ 0\ \ 1]^T$ ed ingresso nullo.

Soluzione

a) La matrice A ha tre autovalori coincidenti: $\lambda_1 = -2$. la molteplicità algebrica di λ_1 è

$$\nu_1 = \dim(\ker(A - 3I)) = 1$$

All'autovalore λ_1 è associato un autovettore $v_{1,1}$ e due autovettori generalizzati $x_{1,1,1}$ e $x_{1,1,2}$ da cui risulta

$$(A + 2I)v_{1,1} = 0 \Rightarrow v_{1,1} = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + 2I)x_{1,1,1} = v_{1,1} \Rightarrow x_{1,1,1} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + 2I)x_{1,1,2} = x_{1,1,1} \Rightarrow x_{1,1,2} = 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di Jordan è:

$$T = \begin{bmatrix} v_{1,1} & x_{1,1,1} & x_{1,1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) La matrice di controllabilità è:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno; quindi il sistema è raggiungibile e controllabile a zero.

b) L'evoluzione libera del sistema dallo stato x_0 è data da:

$$x(t) = Te^{A_j t}T^{-1}x_0 = T \begin{bmatrix} e^{-2t} & t\,e^{-2t} & \frac{t^2}{2}\,e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & t\,e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} T^{-1}x_0$$

$$= \begin{bmatrix} t\,e^{-2t} - \frac{t^2}{2}\,e^{-2t} \\ t\,e^{-2t} + \frac{t^2}{2}\,e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} -t^2\,e^{-2\,t} \end{bmatrix}$$

L' evoluzione dell'uscita è:

$$y(t) = -2t\,e^{-2t}$$

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;
b) Studiare la ricostruibilità del sistema;
c) Progettare un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \\ 44 & 0 & 14 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow ker(Q) = (im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q_k)$; poiché $ker(A^2) = ker(Q_2)$ il sistema è ricostruibile in due passi.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = \begin{bmatrix} \text{imm}(Q^T) & \text{ker}(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = T^{-1}$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asintoticamente stabile perché ha un autovalore in 0, pertanto è possibile progettare un osservatore dead beat. Segue che il polinomio desiderato è $p(\lambda) = \lambda^3$. Procedendo per allocazione diretta del polinomio caratteristico, si ha che

$$det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^3) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 3 + \frac{1}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_3 + \frac{1}{2}\sqrt{20 + 20\,l_1 + l_1^2 + 2\,l_1\,l_3 + l_3^2} = 0 \\ 3 + \frac{1}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_3 - \frac{1}{2}\sqrt{20 + 20\,l_1 + l_1^2 + 2\,l_1\,l_3 + l_3^2} = 0 \end{cases}$$

da cui L= $\begin{bmatrix} -14/5 & 0 & -16/5 \end{bmatrix}^T$.

5. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

Si progetti la legge di controllo $u(t)$ a minima energia tale per cui nell'intervallo di tempo $[t_0 \ \ t_f] = [0 \ \ 1s]$ lo stato del sistema sia passato $x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0$ a $x_1(t_f) = \frac{1}{2},\ x_2(t_f) = 0$.

Soluzione

L'indice di comportamento per problemi di controllo a minima energia è:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt$$

La funzione Hamiltoniana del sistema è:

$$\begin{aligned} H(t) &= u^2(t) + \lambda(t)(Ax(t) + Bu(t)) \\ &= u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2(t)u(t) \end{aligned}$$

Il problema assegnato pone condizioni sullo stato all'istante finale, per cui non abbiamo vincoli sulle condizioni finali delle variabili del sistema ausiliario. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{array}{lll} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, & \rightarrow & \lambda_1(t) = \lambda_{1_f}, \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t), & \rightarrow & \lambda_2(t) = -\lambda_{1f}(t - t_f) + \lambda_{2f} \end{array}$$

in cui λ_{1f}, λ_{2f} sono costanti arbitrarie corrispondenti al valore finale di $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$.
Dalla condizione di stazionarietà si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u(t) - \lambda_2(t) = 0, \quad \rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{2}\lambda_2(t) = -\frac{1}{2}\left(\lambda_{1f}(t - t_f) - \lambda_{2f}\right)$$

Sostituendo l'espressione di $u(t)$ nelle precendenti equazioni, integrando e considerando $t_0 = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{4}\lambda_{1f}t^2 - \frac{1}{2}\left(\lambda_{1f}t_f + \lambda_{2f}\right)t + x_{20} \\ x_1(t) &= \frac{1}{12}\lambda_{1f}t^3 - \frac{1}{4}\left(\lambda_{1f}t_f + \lambda_{2f}\right)t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo queste equazioni all'istante $t = t_f$ si trovano i valori di λ_{1f} e λ_{2f}:

$$\lambda_{1f} = -12, \qquad \lambda_{2f} = 6.$$

La legge di controllo ottima risulta quindi essere:

$$u(t) = 6t - 3$$