Cognome, Nome, N. Matr.: ______

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 11 Gennaio 2010

1. Un pendolo con attrito viscoso non lineare è descritto dalla seguente equazione

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - bl\sin^3(\dot{\theta})$$

dove m, g, l, b sono costanti positive, e θ l'angolo fra il pendolo e il vettore di forza di gravità. Si consideri θ limitato al dominio $\theta \in (-\pi, \pi]$.

   a) Scrivere il modello in forma di stato con variabili di stato $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e verificare che $x_0 = [0\,0]$ sia un punto di equilibrio;

   b) Studiare la stabilità del sistema col metodo indiretto di Lyapunov in x_0.

   c) Studiare la stabilità nel punto x_0 utilizzando la funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta)$$

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;

   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;

   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-3,\ -3,\ -3]$.

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

   a) Portare il sistema in forma canonica di Kalman

   b) determinare se il sistema è stabile, stabilizzabile (ingresso limitato uscita o stato limitato, internamente od esternamente stabile), osservabile e rivelabile.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

   a) Studiare l'osservabilità del sistema;

   b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

   c) Progettare un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

5. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u(t)$$

Si progetti la legge di controllo $u(t)$ a minima energia tale per cui lo stato del sistema sia passato $x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0$ a $x_1(t_f) = 2,\ x_2(t_f) = 1$ in tempo minimo. È sufficiente scrivere il sistema di equazioni necessarie alla soluzione del problema.

Cognome, Nome, N. Matr.: ______________________

Controlli Automatici LS - INF

Compito del 11 Gennaio 2010

1. Un pendolo con attrito viscoso non lineare è descritto dalla seguente equazione

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - bl\sin^3(\dot{\theta})$$

dove m, g, l, b sono costanti positive, e θ l'angolo fra il pendolo e il vettore di forza di gravità. Si consideri θ limitato al dominio $\theta \in (-\pi, \pi]$.

   a) Scrivere il modello in forma di stato con variabili di stato $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e verificare che $x_0 = [0\,0]$ sia un punto di equilibrio;

   b) Studiare la stabilità del sistema col metodo indiretto di Lyapunov in x_0.

   c) Studiare la stabilità nel punto x_0 utilizzando la funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\theta,\dot{\theta}) = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2} + mgl(1-\cos\theta)$$

Soluzione

   a) Il sistema in forma di stato è espresso dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{b}{m}\sin(x_2)^3\end{aligned}$$

   Si verifica per sostituzione che x_0 è un punto di equilibrio.

   b) La matrice Jacobiana del sistema è

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{3b}{m}\sin(x_2)^2\cos(x_2)\end{bmatrix}$$

   Gli autovalori della matrice $J(x_0)$ sono $\lambda = \pm i\sqrt{l/g}$; essendo i due autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria non è possibile asserire la stabilità del sistema.
   Si deve quindi procedere nel verificare che la funzione candidata, espressa nello spazio degli stati,

$$V(x) = \frac{m(lx_2)^2}{2} + mgl(1-\cos(x_1))$$

   sia una funzione di Lyapnov; La funzione candidata è definita positiva nell'intorno dell'origine ed in particolare in tutto il dominio; la sua derivata temporale è:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= ml^2x_2\dot{x}_2 + mgl\sin(x_1)\dot{x}_1\\ &= -bl^2x_2\sin(x_2)^3\end{aligned}$$

   essendo $\dot{V}(x)$ definita negativa in un intorno di x_0 si può asserire la stabilità asintotica del punto.

2. Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -3\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} u(t)$$

   a) Determinare la matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllabilità;

   b) Scrivere il sistema in forma canonica di controllabilità;

   c) Progettare la matrice di retroazione che assegna al sistema gli autovalori $[-3,\ -3,\ -3]$.

Per prima cosa si determina la matrice di raggiungibilità:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 7$$

per cui la matrice P_c^{-1} risulta:

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$T = PP_c^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di controllo risulta quindi:

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico che si vuole assegnare al sistema è:

$$p_{des} = \lambda^3 + 9\,\lambda^2 + 27\,\lambda + 27$$

La matrice di retroazione dello stato risulta quindi:

$$K = K_c T^{-1} = \begin{bmatrix} -20 & -26 & -12 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -44 & -26 \end{bmatrix}$$

3. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

a) Portare il sistema in forma canonica di Kalman

b) determinare se il sistema è stabile, stabilizzabile (ingresso limitato uscita o stato limitato, internamente od esternamente stabile), osservabile e rivelabile.

Soluzione

a) Per portare il sistema in forma canonica di Kalman bisogna prima calcolare le matrici di controllabilità ed osservabilità:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

da cui

$$im(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad ker(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$$

La matrice $T = [\,T_1\,T_2\,T_3\,T_4\,]$ è determinata come

$$T_1 = im(P) \cap ker(Q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = im(P) \setminus im(T_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = ker(Q) \setminus im(T_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \varnothing$$

quindi

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema in forma canonica di Kalman è espresso come:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

a) per deteriminare la stabilità o la stabilizabilità del sistema bisogna studiare gli autovalori dei sottoblocchi diagonali della matrice A_K.

$$\lambda_{11} = -1$$
$$\lambda_{22} = 3$$
$$\lambda_{33} = -1$$

Essendo λ_{22} positivo, il sistema è instabile sia nello stato che nell'uscita. Poichè A_{33} è negativo il sistema è esternamente stabile o stabilizzabile. il sistema è inoltre rivelabile, in quanto gli autovalori legati alla parte non osservabile sono stabili.

4. Dato il sistema dinamico lineare tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

a) Studiare l'osservabilità del sistema;

b) Studiare la ricostruibilità del sistema;

c) Progettare un osservatore dello stato la cui stima converga il più rapidamente possibile.

Soluzione

a) Il sottospazio di non osservabilità è dato da:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \\ 44 & 0 & 14 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow im(Q^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow ker(Q) = (im(Q^T))^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente osservabile.

b) Per verificare la ricostruibilità del sistema occorre vedere se $ker(A^k) \supseteq ker(Q_k)$; poiché $ker(A^3) = \varnothing$ mentre Q non è di rango massimo il sistema non è ricostruibile.

c) La matrice di trasformazione T che porta il sistema in forma di osservabilità è

$$T = \begin{bmatrix} \text{imm}(Q^T) & \ker(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = T^{-1}$$

Il sistema in forma standard di osservabilità è quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0.5 \end{array}\right]$$

La parte non osservabile è asintoticamente stabile perché ha un autovalore in 0.5, pertanto è il sistema è detettabile. Allocando i poli dell osservabili dell osservato in zero si ottiene il seguente polinomio desirato $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 0.5)$. Procedendo per allocazione diretta:

$$det(\lambda I - (A+LC)) = \lambda^3 + (-l_3 - l_1 - \frac{13}{2})\lambda^2 + (\frac{7}{2}l_3 + 7 - \frac{3}{2}l_1)\lambda - 2 - \frac{3}{2}l_3 + l_1 = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2$$

eguagliando i termini dei polinomi si imposta il seguente sistema

$$\begin{cases} (-l_3 - l_1 - \frac{13}{2}) = -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2}l_3 + 7 - \frac{3}{2}l_1 = 0 \\ -2 - \frac{3}{2}l_3 + l_1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano i valori

$$l_1 = -\frac{28}{10}, \qquad l_3 = -\frac{32}{10}$$

5. Dato il sistema dinamico lineare tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} u(t)$$

Si progetti la legge di controllo $u(t)$ a minima energia tale per cui lo stato del sistema sia passato $x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0$ a $x_1(t_f) = 2,\ x_2(t_f) = 1$ in tempo minimo. È sufficiente scrivere il sistema di equazioni necessarie alla soluzione del problema.

Soluzione

L'indice di comportamento per problemi di controllo a minima energia è:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (1 + u^2(t))dt$$

La funzione Hamiltoniana del sistema è:

$$\begin{aligned} H(t) &= 1 + u^2(t) + \lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t)) \\ &= 1 + u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + -2\lambda_2(t)u(t) \end{aligned}$$

Il problema assegnato pone condizioni sullo stato all'istante finale, per cui non abbiamo vincoli sulle condizioni finali delle variabili del sistema ausiliario. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) = -\tfrac{\partial H}{\partial x_1} &= 0, & \rightarrow \quad & \lambda_1(t) = \lambda_{1_f}, \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\tfrac{\partial H}{\partial x_2} &= -\lambda_1(t), & \rightarrow \quad & \lambda_2(t) = -\lambda_{1f}(t - t_f) + \lambda_{2f} \end{aligned}$$

in cui $\lambda_{1f},\ \lambda_{2f}$ sono costanti arbitrarie corrispondenti al valore finale di $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$.
Dalla condizione di stazionarietà si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u(t) - 2\lambda_2(t) = 0, \quad \rightarrow \quad u(t) = \lambda_2(t) = -\lambda_{1f}(t - t_f) + \lambda_{2f}$$

Sostituendo l'espressione di $u(t)$ nelle precendenti equazioni, integrando e considerando $t_0 = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \lambda_{1f}t^2 - 2\left(\lambda_{1f}t_f + \lambda_{2f}\right)t + x_{20} \\ x_1(t) &= \frac{1}{3}\lambda_{1f}t^3 - \left(\lambda_{1f}t_f + \lambda_{2f}\right)t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{aligned}$$

che calcolate in $t = t_f$ sono:

$$
\begin{aligned}
x_2(t_f) &= \lambda_{1f} t_f^2 - 2\left(\lambda_{1f} t_f + \lambda_{2f}\right) t_f + x_{20} = -\lambda_{1f} t_f^2 - 2\lambda_{2f} t_f = 1 \\
x_1(t_f) &= \frac{1}{3}\lambda_{1f} t_f^3 - \left(\lambda_{1f} t_f + \lambda_{2f}\right) t_f^2 + x_{20} t_f + x_{10} = -\frac{2}{3}\lambda_{1f} t_f^3 - \lambda_{2f} t_f^2 = 2
\end{aligned}
$$

Dal momento che l'istante t_f non è noto, si ha:

$$
H(t_f) = 1 + \lambda_{2f}^2 + \lambda_{1f} x_{1f} - 2\lambda_{2f}^2 = 1 - \lambda_{2f}^2 + 2\lambda_{1f} = 0
$$

Le ultime tre equazioni nelle tre incognite λ_{1f}, λ_{2f} e t_f costituiscono la soluzione del problema. Sostituendo i valori numerici si trovano i valori di λ_{1f}, λ_{2f} e t_f:

$$
\lambda_{1f} = -0.4570, \qquad \lambda_{2f} = 0.2933, \quad t_f = 2.2545.
$$

La legge di controllo ottima risulta quindi essere:

$$
u(t) = 0.4570\, t - 0.7369
$$