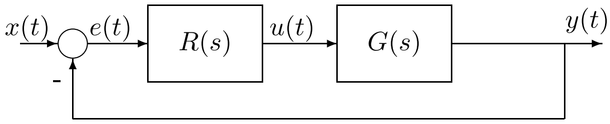
Controlli Automatici L-B - A.A. 2002/2003

Esercitazione 16/06/2003

1. Si consideri lo schema a blocchi di figura.



$$R(s) = K\frac{\tau_z s + 1}{\tau_p s + 1},$$

$$G(s) = \frac{(s+50)}{s(s+5)(s+10)}$$

Assumendo $\tau_p = \tau_z$

a) Si determini l'intervallo di valori di $K > 0$ che rendono stabile il sistema e la pulsazione dei poli immaginari puri che si hanno in corrispondenza della stabilità semplice.

b) Considerando l'ingresso $x(t) = 5t$, determinare il valore di K che rende inferiore al 2% l'errore a regime.

c) Si tracci il luogo delle radici del sistema, calcolando l'ascissa di intersezione di eventuali asintoti e dell'eventuale baricentro.

2. Con riferimento alla figura precedente:

a) Utilizzando tecniche di cancellazione poli/zeri, si determino i valori τ_p e τ_z che consentono di spostare il punto di incontro degli asintoti del luogo delle radici nel punto di ascissa $\sigma_a = -2$.

b) Si commenti il regolatore così ottenuto, anche il relazione con il quesito 2-b, dicendo per quali valori di K il sistema retroazionato è stabile.

c) Si stimi il tempo di assestamento T_a del sistema retroazionato per $K \to \infty$ e si giustifichi tale risultato.

d) Supponendo che si voglia implementare per via digitale il regolatore $R(s)$, si scelga il tempo di campionamento T svolgendo le considerazioni ritenute più idonee.

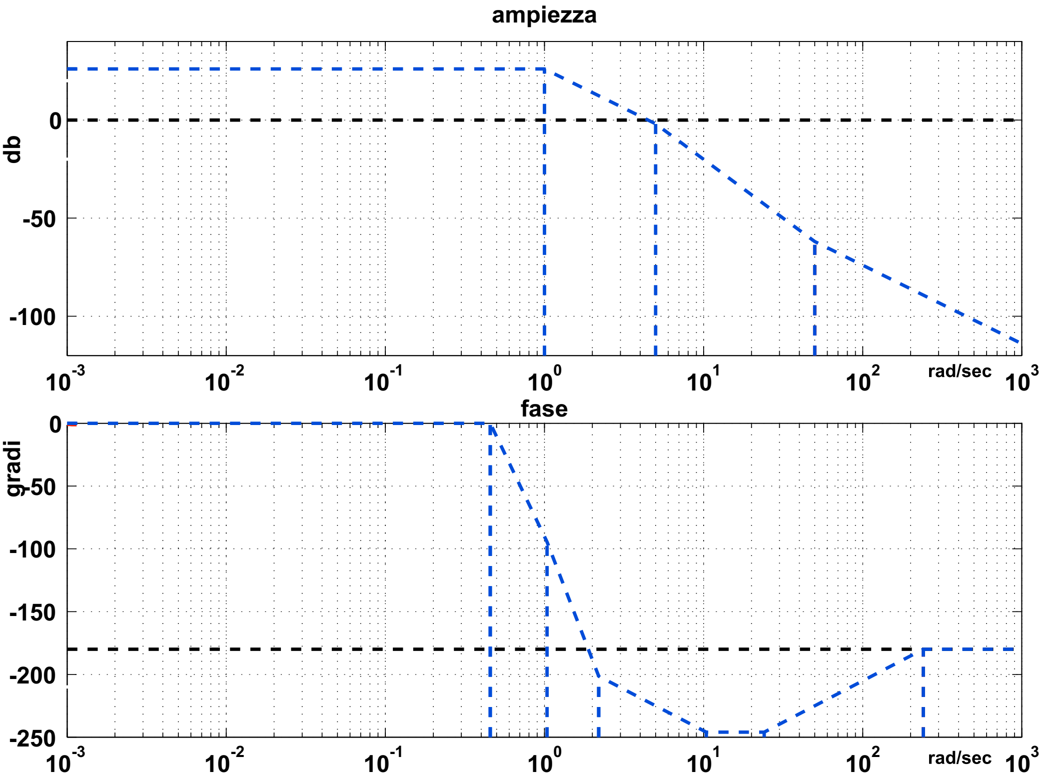
3. Supponendo ora $R(s) = \frac{s+7}{s+20}$, si consideri un tempo di campionamento $T = 0.2 sec$.

a) Si discretizzi $R(s)$ utilizzando il metodo della trasformazione bilineare.

b) Si scriva l'equazione alle differenze che esprime la relazione tra l' ingresso e_k e l'uscita u_k.

c) Supponendo che il segnale in ingresso al regolatore sia un impulso discreto $e_k = \delta_k$, si scriva il valore dell'uscita per $t = 0, T, 2T$

4. Si considerino i seguenti diagrammi di Bode:



a) Si ricavi la funzione di trasferimento, a fase minima, associata ai diagrammi.

b) Utilizzando tecniche di cancellazione poli/zeri, si progetti un regolatore $R(s)$ che assicuri un margine di fase $M_F > 60^o$ con pulsazione di incrocio $\omega_c > 0.8$ rad/sec.

c) Nel caso in cui si desideri discretizzare tale regolatore, si svolgano le considerazioni necessarie alla scelta del periodo di campionamento T.

Controlli Automatici L-B - A.A. 2002/2003

Esercitazione 16/06/2003

Svolgimento

1) a) Con $\tau_p = \tau_z$ si ha che $R(s) = K$, l'equazione caratteristica risulta:

$$s(s+5)(s+10) + K(s+50) = 0$$

Applicando il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 50+K \\ 2 & 15 & 50K \\ \hline 2' & 3 & 10K \\ 1 & 150-7K & \\ 0 & 10K & \end{array}$$

si ottiene che il sistema retroazionato è stabile per:

$$0 < K < \frac{150}{7} = K^*$$

La pulsazione corrispondente ai poli immaginari puri si calcola come:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{10K^*}{3}} = \sqrt{\frac{50+K^*}{1}} = 8.45 \text{ rad/sec}$$

b) L'ingresso in questione è una rampa, pertanto l'errore (di velocità) si calcola come:

$$e_\infty = e_v = \frac{A}{K_v}$$

ove A è la pendenza della rampa (5 in questo caso) e K_v è la costante di velocità:

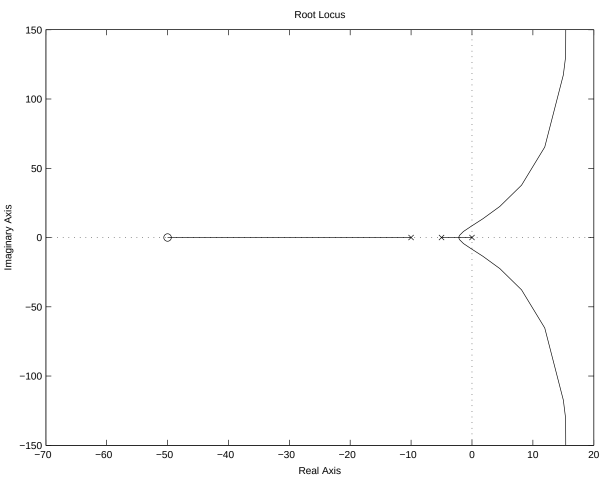
$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} sKG(s) = K\frac{50}{5\times 10} = K$$

Pertanto:

$$e_v = \frac{5}{K}$$

Volendo ottenere $e_v < 2\%$, si ha $K > 250$. Confrontando tale risultato con quanto ottenuto al punto a), si deduce che non è possibile soddisfare tale specifica con un regolatore proporzionale, poiché il sistema retroazionato risulterebbe instabile.

c) Il luogo delle radici é illustrato nella figura seguente:



$$\sigma_a = \frac{1}{2}[0-5-10+50] = \frac{35}{2} \qquad \sigma_b = \frac{1}{3}[0-5-10] = -5$$

2) Dal luogo delle radici appena tracciato si vede che l'instabilità del sistema retroazionato, per alti valori di K, è dovuta alla collocazione molto "a sinistra" dello zero di $G(s)$. In termini frequenziali, ciò significa che l'anticipo di fase fornito da tale zero avviene a frequenze molto superiori a quella di incrocio, cosicché il margine di fase risulta negativo, per via del ritardo di fase causato dai tre poli.

a) Per stabilizzare il sistema si può pensare di "spostare" a destra lo zero, utilizzando tecniche di cancellazione. In particolare il polo del regolatore dovrà cancellare lo zero di $G(s)$:

$$\frac{1}{\tau_p} = 50 \qquad \Longrightarrow \qquad \tau_p = \frac{1}{50}$$

Lo zero z invece si potrà calcolare utilizzando la specifica sul punto di incontro degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\left[0 - 5 - 10 - z\right] = -2$$

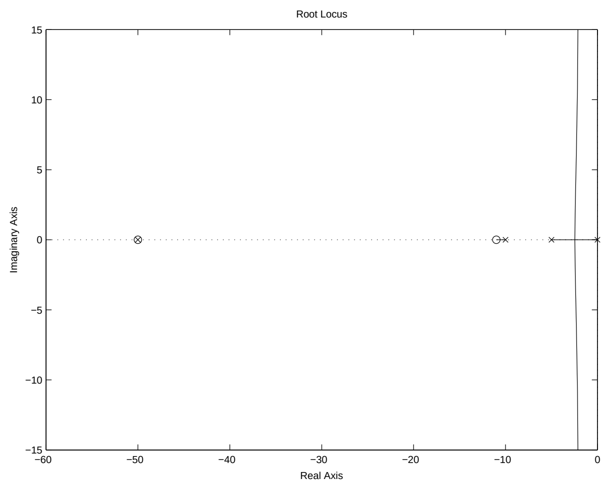
da cui:

$$z = -11 \qquad \Longrightarrow \qquad \tau_z = \frac{1}{11}$$

e quindi il regolatore avrà la funzione di trasferimento:

$$R(s) = K\frac{1 + \dfrac{s}{11}}{1 + \dfrac{s}{50}}$$

Il luogo delle radici così ottenuto è mostrato nella figura seguente, ove è evidenziata anche la cancellazione polo/zero operata.



b) Il regolatore ottenuto è ovviamente una rete di anticipo. Si vede che il sistema è stabile per qualunque valore di $K > 0$ e pertanto la precedente specifica sull'errore a regime può essere ora soddisfatta (la parte dinamica di $R(s)$ ha guadagno unitario e pertanto il guadagno statico dell'anello complessivo non viene modificato).

c) Per alti valori di K il sistema retroazionato si comporta come un sistema a poli dominanti complessi coniugati. In tal caso vale l'approssimazione:

$$T_{a5} = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

Per alti valori di K la parte reale dei poli complessi coniugati sarà prossima all'ascissa degli asintoti verticali:

$$\delta\omega_n = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad T_{a5} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ sec}$$

d) Essendo il tempo di assestamento del sistema retroazionato pari a 1.5 sec, appare ragionevole, per alti valori di K, scegliere:

$$T = \frac{T_a}{10}$$

Tuttavia tale scelta può non essere soddisfacente in particolare se la pulsazione naturale ω_n dei poli complessi coniugati è elevata. In tal caso la scelta più indicata è:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_s = 10\omega_n$$

3) La discretizzazione con il metodo della trasformazione bilineare richiede di porre:

$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

a) Pertanto la versione discreta del regolatore è:

$$R(z) = \frac{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 7}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 20} = \frac{10 - 10z^{-1} + 7 + 7z^{-1}}{10 - 10z^{-1} + 20 + 20z^{-1}} = \frac{17 - 3z^{-1}}{30 + 10z^{-1}}$$

b) La corrispondente equazione alle differenze sarà pertanto:

$$\left[30 + 10z^{-1}\right] u_k = \left[17 - 3z^{-1}\right] e_k$$

da cui:

$$u_k = \frac{17}{30}e_k - \frac{1}{10}e_{k-1} - \frac{1}{3}u_{k-1}$$

c) Si tratta ora di calcolare $u(0),\ u(1),\ u(2)$ quando $e(0) = 1,\ e(1) = e(2) = \ldots = 0$.

4) a) Analizzando il diagramma delle ampiezze, si trova che i punti di rottura si hanno in corrispondenza delle pulsazioni:

$$\omega_1 = 1 \text{ rad/sec}, \qquad \omega_2 = 5 \text{ rad/sec}, \qquad \omega_3 = 50 \text{ rad/sec}$$

Si vede immediatamente che ω_2 corrisponde ad un polo semplice in quanto provoca una variazione di pendenza del diagramma delle ampiezze di -20 dB/dec ed un ritardo di fase di -90^0:

$$G(s) = \mu\frac{\ldots}{(s+5)\ldots}$$

Analogamente, ω_3 corrisponde ad uno zero semplice per via di una variazione di pendenza di $+20$ dB/dec ed un anticipo di fase di 90^0:

$$G(s) = \mu\frac{(s+50)}{(s+5)\ldots}$$

Infine si osserva che alla pulsazione ω_1 corrisponde una coppia di poli complessi coniugati (variazione di pendenza di -40 dB/dec e ritardo di 180^0). Si avrà pertanto $\omega_n = \omega_1$, mentre per calcolare il coefficiente di smorzamento δ occorre valutare i punti di rottura del diagramma delle fasi. È noto che la distanza tra i due punti di rottura $\omega_a,\ \omega_b$ della approssimazione asintotica e la pulsazione ω_n è data da (per maggiori dettagli, consultare *G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli*):

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} \simeq 4.81^{\delta}$$

In scala logaritmica, tale relazione diviene:

$$\log\omega_n - \log\omega_a = \log\omega_b - \log\omega_n = \delta\log(4.81)$$

Misurando sui diagrammi ad esempio

$$\log\omega_n - \log\omega_a = 0.34 \text{ decadi}$$

si deduce che:

$$\delta = \frac{0.3411}{\log(4.81)} \simeq 0.5$$

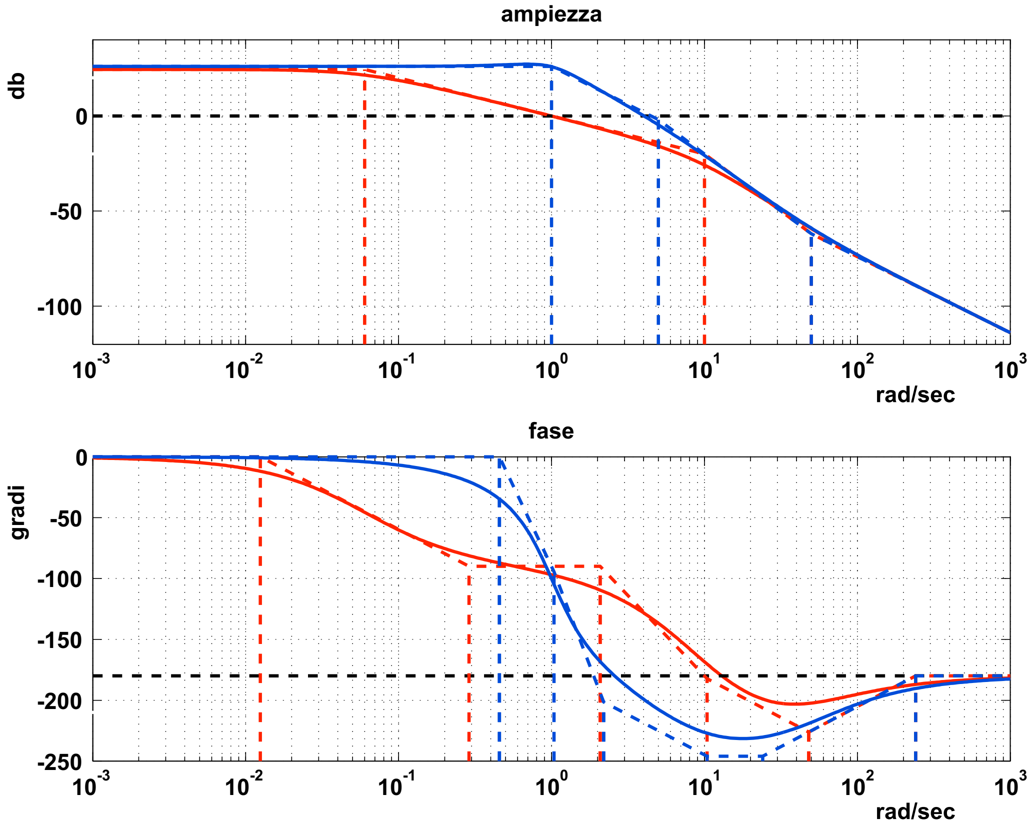
quindi:

$$G(s) = \mu\frac{(s+50)}{(s+5)(s^2+s+1)}$$

Si osservi come il guadagno statico della funzione riportata sul diagramma sia pari a 26 dB, e pertanto:

$$G(0) = \mu\frac{50}{5\times 1} = 10\mu = 20(=20dB) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = 2$$

b) Una soluzione compatibile con le specifiche fornite si ha assumendo che la funzione di anello desiderata $L_m(s)$ abbia pulsazione di incrocio $\omega_c = 1$ rad/sec. Se il diagramma asintotico delle ampiezze di $L_m(s)$ interseca l'asse a 0 dB a tale pulsazione con pendenza di -20 dB/dec, si otterrà un margine di fase approssimativamente di 90^0. Nella figura seguente, il diagramma di Bode della funzione di anello $L_m(s)$ è tracciato in rosso: Pertanto, il regolatore dovrà cancellare i poli di $G(s)$ collocati in ω_1, ω_2



ed introdurre altrettanti poli **reali** alle nuove pulsazioni di rottura:

ω	tipo	termine nel regolatore
$\omega_4 = 0.06$	polo semplice	$(s + 0.06)$
$\omega_5 = 10$	polo reale doppio	$(s + 10)^2$

e pertanto si ottiene:

$$R(s) = \rho \frac{(s^2 + s + 1)(s + 5)}{(s + 0.06)(s + 10)^2}$$

Si osservi che, per non alterare il comportamento a regime del sistema, il guadagno statico del regolatore $R(s)$ DEVE essere unitario. In questo caso si ricava che:

$$R(0) = \rho \frac{5}{0.06 \times 100} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho = \frac{6}{5}$$

c) La pulsazione di incrocio ottenuta al punto precedente vale $\omega_c = 1$ rad/sec, ed è noto che:

$$\omega_c \simeq \omega_b$$

ove ω_b è la larghezza di banda del sistema in anello chiuso. Appare pertanto ragionevole scegliere:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_s = 20\omega_c = 20 \text{ rad/sec}$$

Dunque:

$$T = \frac{\pi}{10}$$

e si sceglie $T = 0.3$ sec.; la bontà di tale scelta deve essere ovviamente verificata a posteriori. Si osservi che il ritardo di fase dovuto al ricostruttore di ordine zero si può stimare come:

$$\Delta\phi \simeq \omega_c \frac{T}{2} = -8.59^0$$

È evidente come la specifica $M_F > 60^0$ continui ad essere soddisfatta, poiché $R(s)$ calcolato al punto precedente garantiva $M_F \simeq 90^0$.