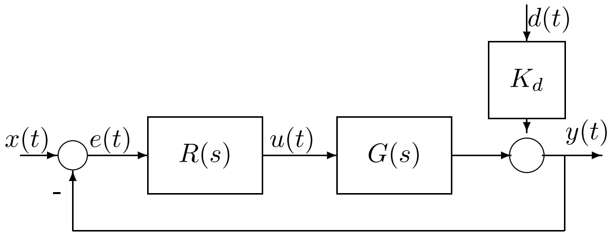
Controlli Automatici L-A - Esercitazione

1. Si consideri lo schema a blocchi di figura.



$$R(s) = K\frac{\tau s+1}{s+1},$$
$$G(s) = \frac{25}{s(s^2+6s+25)},$$
$$K_d = 2$$

   a) Considerando gli ingressi $x(t) = 3h(t); d(t) = 5h(t)$ (con $h(t)$ gradino unitario), determinare il valore a regime dell'errore $e(t)$ in funzione di K.

   b) Considerando gli ingressi a rampa $x(t) = 3t; d(t) = 5t$ determinare il valore a regime dell'errore $e(t)$ in funzione di K.

   c) Considerando gli ingressi $x(t) = 0$ e $d(t) = 7\sin(t)$ determinare il valore a regime dell'uscita $y(t)$ in funzione di K, avendo assunto $\tau = 1$.

2. Con riferimento alla figura precedente

   a) Assumendo $K = 1$, determinare per quali valori di $\tau > 0$ il sistema in retroazione è stabile *(suggerimento: si applichi il criterio di Routh e si discuta la relativa tabella in funzione di τ).*

   b) Detto τ_M il massimo valore di τ calcolato al punto precedente, si discuta il tipo di regolatore $R(s)$ in funzione di $\tau \in (0, \tau_M]$

3. Con riferimento allo schema dell'esercizio 1, assumendo $\tau = 0$:

   a) Si calcolino i valori di K per cui il sistema retroazionato è stabile

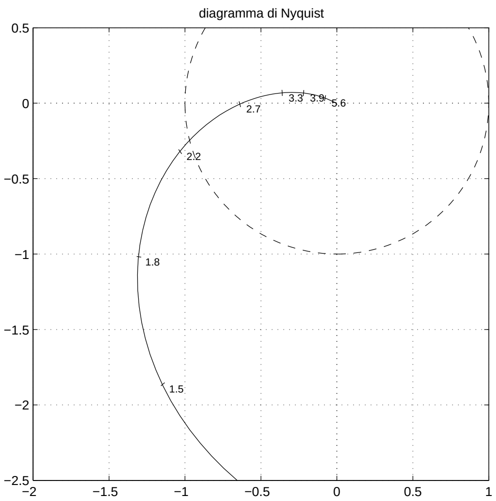
   b) Con $K = 1$, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di anello $L(s) = R(s)G(s)$, determinandone con esattezza le caratteristiche salienti, come l'ascissa di eventuali asintoti e delle intersezioni con l'asse reale;

   c) Con gli stessi parametri del punto precedente, si traccino i diagrammi asintotici di Bode di $L(s) = R(s)G(s)$;

   d) Si calcoli il margine di ampiezza M_A del sistema in funzione di K;

   e) Con $K = 1$, mediante il criterio di Nyquist, si dica se il sistema retroazionato è stabile oppure no (in tal caso indicare quanti poli instabili sono presenti).

4. Un sistema dinamico ha il diagramma polare rappresentato in figura.



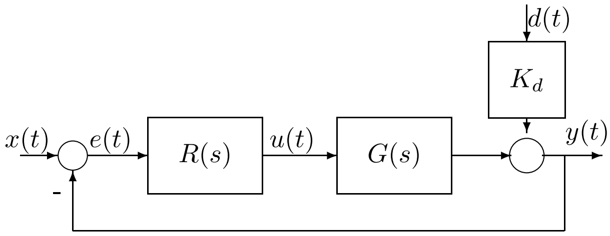
   a) Utilizzando le formule di inversione:

$$\tau = \frac{M - \cos\phi}{\omega \sin\phi}, \qquad \alpha = \frac{M\cos\phi - 1}{M(M - \cos\phi)}$$

   determinare una rete anticipatrice in modo da ottenere un margine di fase $M_F = 45^o$ (suggerimento: si consideri il punto di pulsazione $\omega = 2.7\ rad/sec$)

Controlli Automatici L-A - Esercitazione

1. Si consideri lo schema a blocchi di figura.



$$R(s) = K\frac{\tau s + 1}{s + 1},$$
$$G(s) = \frac{25}{s(s^2 + 6s + 25)},$$
$$K_d = 2$$

   a) Considerando gli ingressi $x(t) = 3h(t); d(t) = 5h(t)$ (con $h(t)$ gradino unitario), determinare il valore a regime dell'errore $e(t)$ in funzione di K.
   Sistema di tipo 1: errore a regime nullo

   b) Considerando gli ingressi a rampa $x(t) = 3t; d(t) = 5t$ determinare il valore a regime dell'errore $e(t)$ in funzione di K.
   Si ha che l'errore $e(t)$ è determinato dalla sovrapposizione degli effetti dell'ingresso $x(t)$ e del disturbo $d(t)$:

$$E(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}(X(s) - K_d D(s)) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}\frac{(3 - 10)}{s^2}$$

   quindi, indicando con K_v la costante di velocità del sistema, si ottiene:

$$e_\infty = \frac{-7}{K_v} = \frac{-7}{K}$$

   Si noti che il valore di τ non influenza in alcun modo gli errori a regime.

   c) Considerando gli ingressi $x(t) = 0$ e $d(t) = 7\sin(t)$ determinare il valore a regime dell'uscita $y(t)$ in funzione di K, avendo assunto $\tau = 1$. **La funzione di trasferimento disturbo-uscita è:**

$$S(s) = K_d \frac{1}{1 + K\frac{25}{s(s^2+6s+25)}}$$

   per calcolare l'uscita a regime si ricorre al teorema della risposta armonica:

$$y(t) = |S(j\omega)| 7 \sin(\omega t + \arg(S(j\omega)))$$

   Con $\omega = 1$ rad/sec. si ottiene:

$$|S(j1)| = 1.16 \qquad \arg(S(j1)) = 52^o$$

2. Con riferimento alla figura precedente

   a) Assumendo $K = 1$, determinare per quali valori di $\tau > 0$ il sistema in retroazione è stabile *(suggerimento: si applichi il criterio di Routh e si discuta la relativa tabella in funzione di τ).*
   L'equazione caratteristica risulta:

$$s^4 + 7s^3 + 31s^2 + 25(1 + \tau)s + 25 = 0$$

   e la relativa tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 31 & 25 \\
3 & 7 & 25(1+\tau) & \\
2 & 192 - 25\tau & 175 & \\
1 & (192 - 25\tau)(1+\tau) - 49 & \textbf{dividendo per 25} & \\
0 & 175 & &
\end{array}$$

   e imponendo che tutti gli elementi della prima colonna abbiano lo stesso segno si ottiene:

$$0 < \tau < 7.448 = \tau_M$$

b) Detto τ_M il massimo valore di τ calcolato al punto precedente, si discuta il tipo di regolatore $R(s)$ in funzione di $\tau \in (0, \tau_M]$

$\tau < 1$	**Rete di ritardo,**
$\tau = 1$	**Regolatore proporzionale,**
$1 < \tau < \tau_M$	**Rete di anticipo.**

3. Con riferimento allo schema dell'esercizio 1, assumendo $\tau = 0$:

a) Si calcolino i valori di K per cui il sistema retroazionato è stabile
L'equazione caratteristica risulta:

$$s^4 + 7s^3 + 31s^2 + 25s + 25K = 0$$

e la relativa tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 31 & 25K \\ 3 & 7 & 25 & \\ 2 & 192 & 175K & \\ 1 & 192 - 49K & \text{\tiny dividendo per 25} & \\ 0 & 175K & & \end{array}$$

e imponendo che tutti gli elementi della prima colonna abbiano lo stesso segno si ottiene:

$$0 < K < \frac{192}{49} = K^*$$

Volendo calcolare anche la pulsazione ω^* dei poli che, per $K = K^*$, sono immaginari puri è possibile ricorrere alla formula:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)}} = \sqrt{\frac{25}{7}} \simeq 1.9 \textbf{ rad/sec}$$

b) Con $K = 1$, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di anello $L(s) = R(s)G(s)$, determinandone con esattezza le caratteristiche salienti, come l'ascissa di eventuali asintoti e delle intersezioni con l'asse reale;
TRACCIAMENTO DEL DIAGRAMMA POLARE:

$$L(s) = \frac{25}{s(s+1)(s^2 + 6s + 25)}$$

Si tratta di una funzione di tipo 1, pertanto avremo un asintoto verticale. Riscrivendo il guadagno di anello nella forma a costanti di tempo:

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2 + \frac{6}{25}s + 1)}$$

l'ascissa dell'asintoto si determina mediante la formula:

$$\sigma_A = \mu \left(\sum_{i=1}^{m} \tau_{zi} - \sum_{i=1}^{n} \tau_{pi} \right)$$

ove:

μ	**costante di guadagno (di pos. o di vel. o di acc.) di $L(s)$**
τ_{zi}	**costanti di tempo degli zeri**
τ_{pi}	**costanti di tempo dei poli**

dunque:

$$\sigma_A = 1 \left(-1 - \frac{6}{25} \right) = -\frac{31}{25}$$

Valutando poi il segno della costante

$$\Delta_A = \sum_{i=1}^{m} \tau_{zi} - \sum_{i=1}^{n} \tau_{pi}$$

si determina la "rotazione" iniziale del diagramma:

$$\Delta_A > 0 \quad \textbf{rotazione iniziale in senso ANTIORARIO}$$
$$\Delta_A < 0 \quad \textbf{rotazione iniziale in senso ORARIO}$$

Poiché $\Delta_A = -31/25$ il diagramma ruota inizialmente in senso orario.
Studio del comportamento asintotico:

$$\lim_{\omega \to 0^+} L(s)|_{s=j\omega} = \lim_{\omega \to 0^+} \left.\frac{25}{25s}\right|_{s=j\omega} = \begin{cases} |L(j0^+)| = \infty \\ \arg\{L(j0^+)\} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

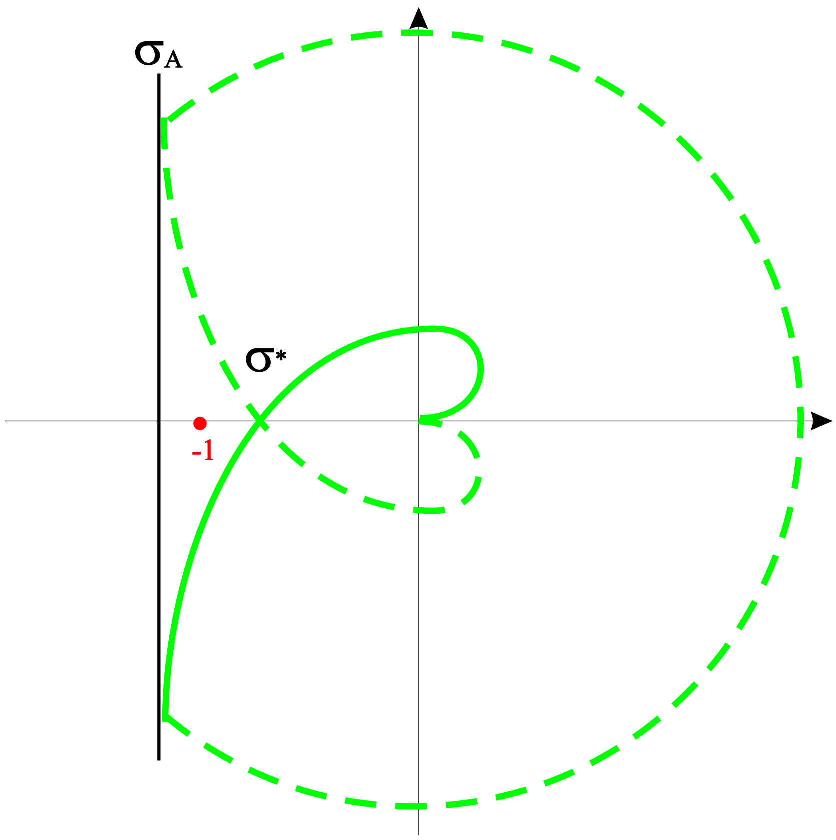
$$\lim_{\omega \to +\infty} L(s)|_{s=j\omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \left.\frac{25}{s^4}\right|_{s=j\omega} = \begin{cases} |L(j\infty)| = 0 \\ \arg\{L(j\infty)\} = -2\pi \end{cases}$$

Intersezioni con l'asse reale: Si possono calcolare imponendo che la parte immaginaria di $L(j\omega)$ si annulli, oppure ricordando che:
SIA IL CRITERIO DI ROUTH CHE QUELLO DI NYQUIST SONO NECESSARI E SUFFICIENTI PER LA STABILITÀ, ossia per ogni coppia di poli che diventano instabili al variare di K, cambia il numero di variazioni della tabella di Routh così come il numero di rotazioni del diagramma di Nyquist intorno al punto critico $-1 + j0$.
Di conseguenza, per ogni valore di $K = K^*$ che modifica il numero di variazioni di segno nella prima colonna della tabella di Routh, si ha un punto del diagramma polare della funzione di anello $KL(s)$ che passa per il punto critico, da cui si deduce che deve valere:

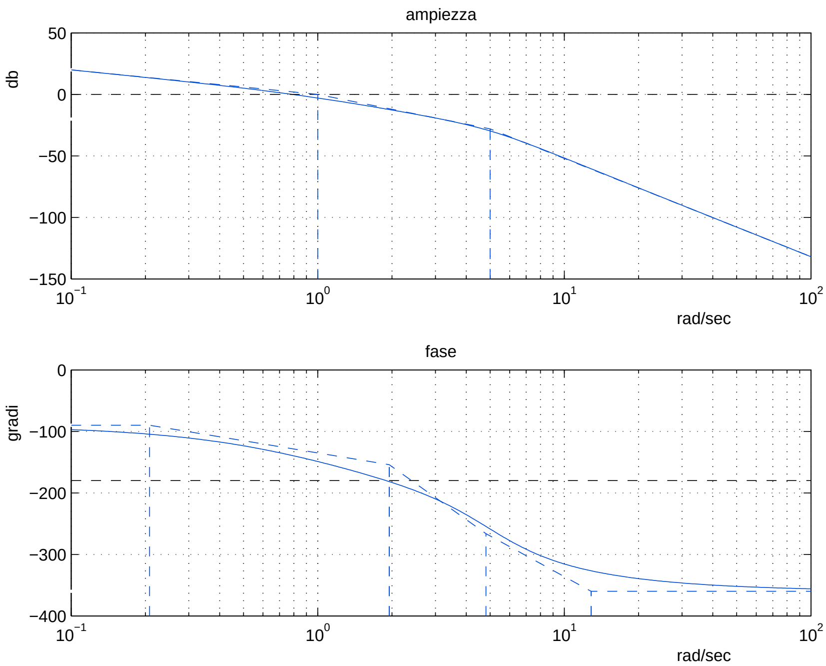
$$K^*\sigma^* = -1$$

e pertanto l'ascissa σ^* dell'intersezione del diagramma polare di $L(s)$ con l'asse reale vale:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{49}{192}$$



c) Con gli stessi parametri del punto precedente, si traccino i diagrammi asintotici di Bode di $L(s) = R(s)G(s)$

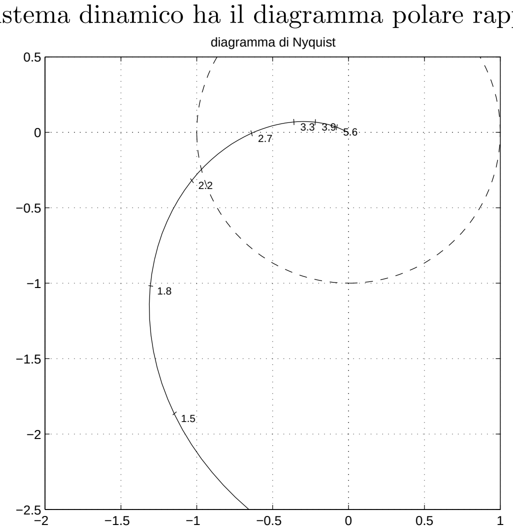


d) Si calcoli il margine di ampiezza M_A del sistema in funzione di K;
Per la definizione di margine di ampiezza, si ha:

$$M_A = -\frac{1}{\sigma^*} = \frac{192}{49}$$

e) Con $K = 1$, mediante il criterio di Nyquist, si dica se il sistema retroazionato è stabile oppure no (in tal caso indicare quanti poli instabili sono presenti).
Il diagramma non circonda né tocca il punto critico, pertanto, non avendo $L(s)$ nessun polo o zero instabile, il sistema retroazionato è STABILE

4. Un sistema dinamico ha il diagramma polare rappresentato in figura.



a) Utilizzando le formule di inversione:

$$\tau = \frac{M - \cos\phi}{\omega \sin\phi}, \qquad \alpha = \frac{M\cos\phi - 1}{M(M - \cos\phi)}$$

determinare una rete anticipatrice in modo da ottenere un margine di fase $M_F = 45^o$ (suggerimento: si consideri il punto di pulsazione $\omega = 2.7\ rad/sec$)

Dalla misura diretta sul diagramma, si ricava che il punto A, corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 2.7\ rad/sec$ ha le seguenti coordinate:

$$A \equiv -0.6 + j0$$

esso deve essere "spostato" mediante la rete anticipatrice nel punto B, giacente sulla circonferenza unitaria e di argomento -135^o.
Si ricava quindi:

$$M = \frac{|B|}{|A|} = \frac{1}{0.6}$$

e

$$\phi = \arg\{B\} - \arg\{A\} = -135^o + 180^o = 45^o = \frac{\pi}{4}$$

e sostituendo nelle formule di inversione:

$$\tau = 0.5978, \alpha = 0.1116$$

La rete anticipatrice ottenuta è:

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 0.5978s}{1 + 0.0667s}$$