

# CONTROLLI AUTOMATICI L-B



## ESERCIZI SUL CONTROLLO IN RETROAZIONE

Ing. Nicola Diolaiti

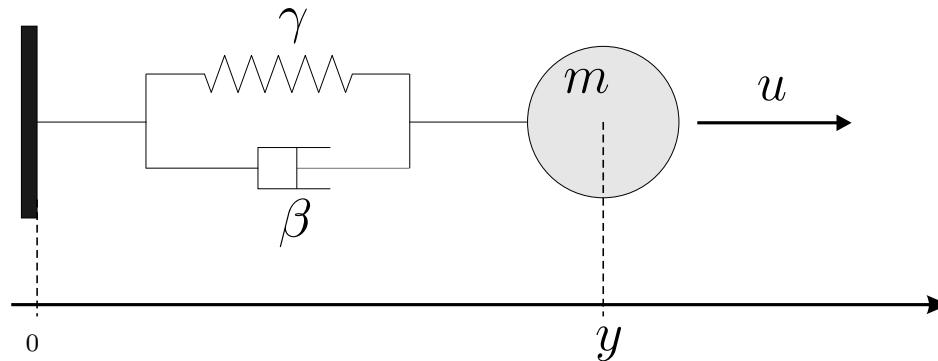
DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093079 / 68

e-mail: [ndiolaiti@deis.unibo.it](mailto:ndiolaiti@deis.unibo.it)

<http://www-lar.deis.unibo.it/people/ndiolaiti>

# Descrizione del plant



$$m = 0.1 \text{ kg}$$

$$\gamma = 2.5 \text{ N/m}$$

$$\beta = 0.7 \text{ Ns/m}$$

- Sotto l'azione della forza esterna  $u$ , il moto della massa  $m$ , collegata ad una molla di costante elastica  $\gamma$  e ad un damper il cui coeff. di attrito viscoso è  $\beta$ , è descritto dall'equazione differenziale del 2° ordine:

$$m\ddot{y} = u - \gamma y - \beta\dot{y} \quad (1)$$

- Nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, la  $L$ -trasformata risulta:

$$[ms^2 + \beta s + \gamma] Y(s) = U(s) \quad (2)$$

quindi la fdt tra l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  è:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + \beta s + \gamma} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{\beta}{m}s + \frac{\gamma}{m}} \quad (3)$$

# Descrizione del plant

- Per individuare preliminarmente i parametri di questa fdt possiamo riscriverla nella forma:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{\beta}{m}s + \frac{\gamma}{m}} = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4)$$

da cui si ottiene:

$$\omega_n^2 = \frac{\gamma}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 5 \quad (5)$$

$$2\delta\omega_n = \frac{\beta}{m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma m}} = 0.7 \quad (6)$$

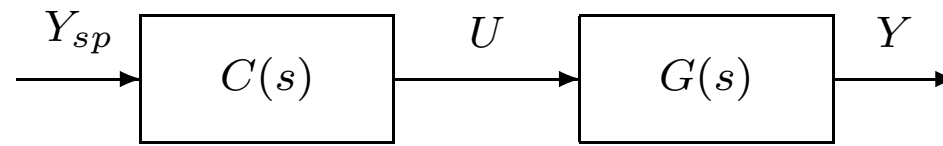
$$\mu\omega_n^2 = \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\gamma} = 0.4 \quad (7)$$

- Con i valori assunti, la funzione di trasferimento che descrive la dinamica del sistema da controllare risulta:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 25} \quad (8)$$

- **Si vuole progettare un sistema di controllo che assicuri errore a regime inferiore al 2% in risposta ad ingressi a gradino**

# Soluzione in Catena Aperta



- La dinamica complessiva tra ingresso e uscita è  $G_c(s) = C(s)G(s)$  e l'errore  $e(t)$  rispetto al set-point è dato da:

$$E(s) = Y_{sp}(s) - Y(s) = [1 - G_c(s)] Y_{sp}(s) \quad (9)$$

- Ricordando che l'errore a regime in risposta al gradino unitario risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s [1 - G_c(s)] \frac{1}{s} = 1 - G_c(0) \quad (10)$$

- Si sceglie  $C(s) = K$  ottenendo:

$$e_\infty = 1 - K \frac{\mu \omega_n^2}{\omega_n^2} = 1 - K\mu \quad (11)$$

- Quindi la scelta di  $K$ :

$$K = \frac{1}{\mu} = 2.5 \quad (12)$$

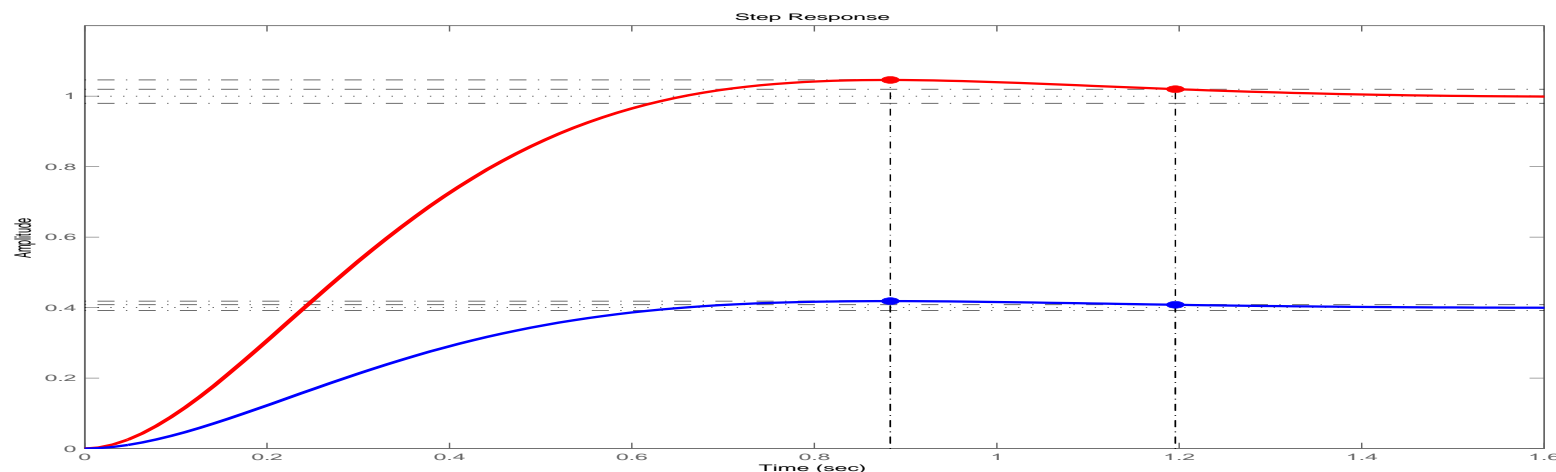
**garantisce errore a regime nullo in condizioni nominali**

# Soluzione in Catena Aperta

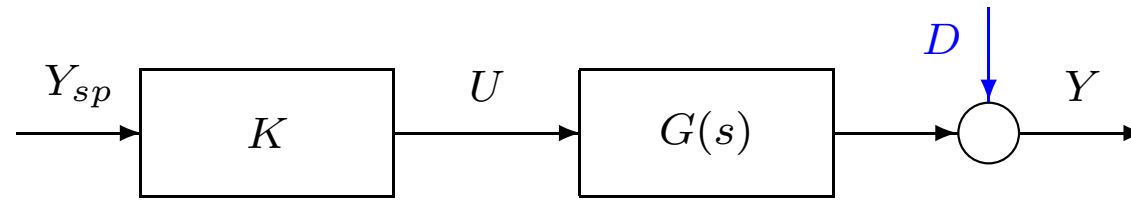
- Le funzioni di trasferimento di plant e sistema controllato sono:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 25} \quad G_c(s) = 2.5 \frac{10}{s^2 + 7s + 25} \quad (13)$$

- I poli sono invariati e quindi la dinamica (*tempo di assestamento, massimo sorpasso percentuale, ecc.*) non viene modificata (*migliorata*) dal controllore
- Matlab:
  - » `NG=[10], DG=[1 7 25], G=tf(NG,DG)`
  - » `K=2.5, Gc=K*G`
  - » `%analisi della risposta al gradino dei due sist.`
  - » `step(G,Gc)`

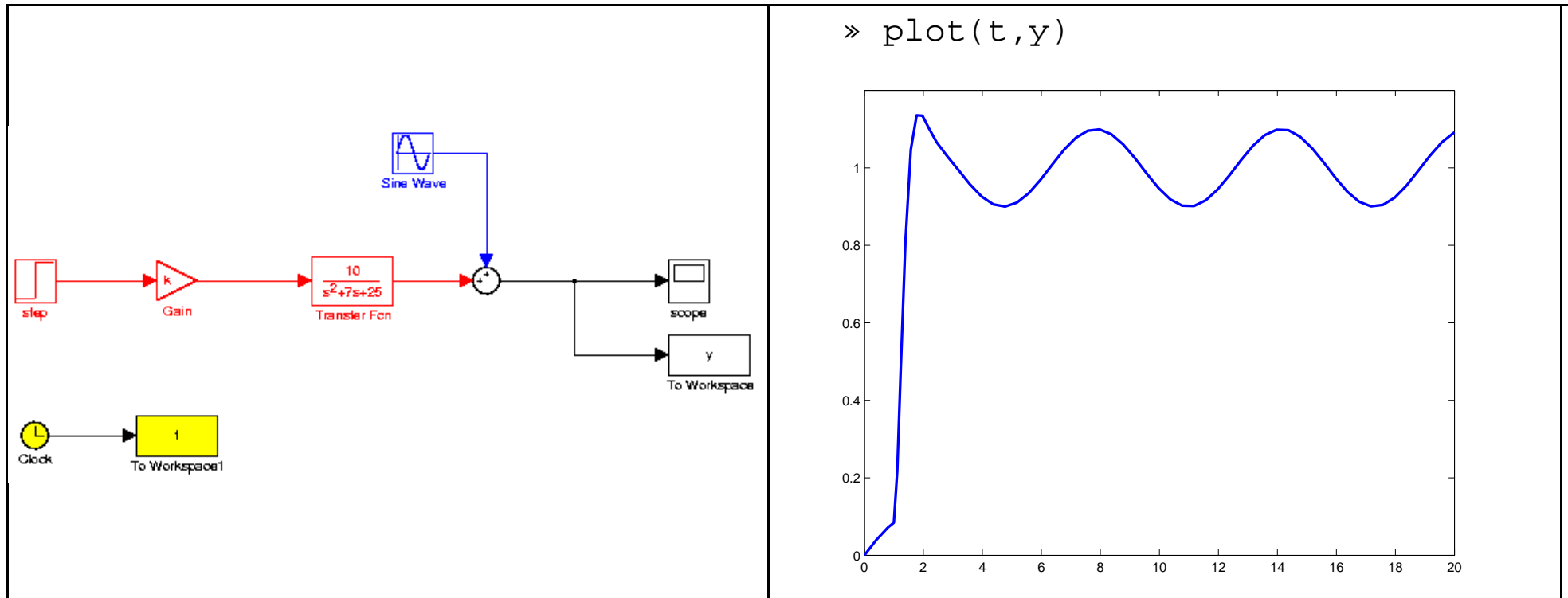


# Catena Aperta e Disturbi sull'Uscita



- L'uscita  $y(t)$  risulta dalla sovrapposizione degli effetti di ingresso  $y_{sp}(t)$  e disturbo  $d(t)$ :

$$Y(s) = KG(s)Y_{sp}(s) + D(s) \quad (14)$$



# Catena Aperta e Variazioni Parametriche

- Poiché  $\omega_n^2 = \frac{\gamma}{m}$ , una variazione della costante elastica  $\gamma$  della molla, provoca una variazione della pulsazione naturale  $\omega_n$  dei poli
- La variazione del 10% di  $\gamma = \gamma_{nom} + \Delta\gamma = 2.75$  (N/m) fa sì che la fdt vera del plant da controllare sia:

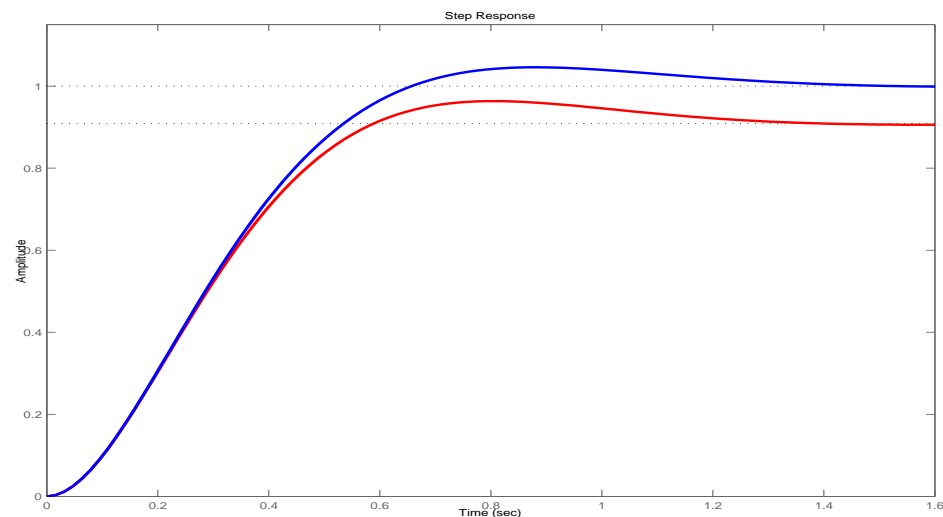
$$G_v(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 27.5} \quad G_{v,c} = 2.5 \frac{10}{s^2 + 7s + 27.5} \quad (15)$$

- Si vede immediatamente che:

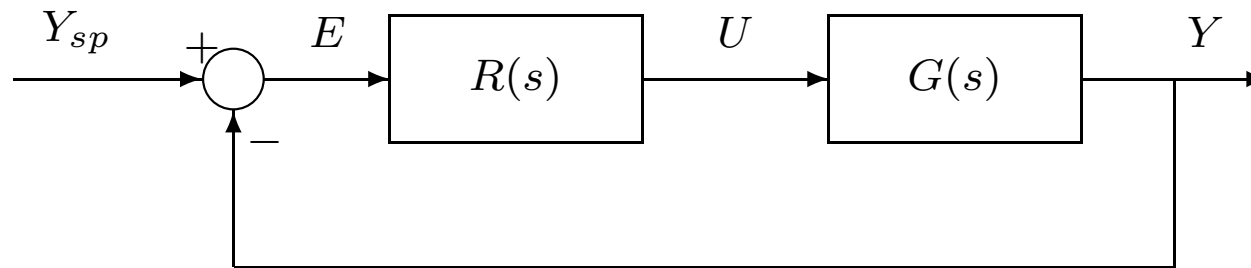
$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_{v,c}(s) \frac{1}{s} = 0.91 \quad \Rightarrow \quad e_\infty = 1 - 0.91 = 9\% \quad (16)$$

e la specifica di errore a regime inferiore al 2% non è più soddisfatta.

- » `NV=10; DV=[1 7 27.5];`
- » `GV=tf(NV, DV)`
- » `GVc=K*GV;`
- » `dcgain(Gc)`
- » `dcgain(GVc)`
- » `step(Gc, GVc);`
- » `ltiview(Gc, GVc);`



# Controllo Proporzionale in Retroazione



- Guadagno di anello:  $L(s) = R(s)G(s)$
- Funzione di trasferimento ingresso-uscita:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad (17)$$

- come nel caso precedente, scegliamo  $R(s) = K_P$ , da cui:

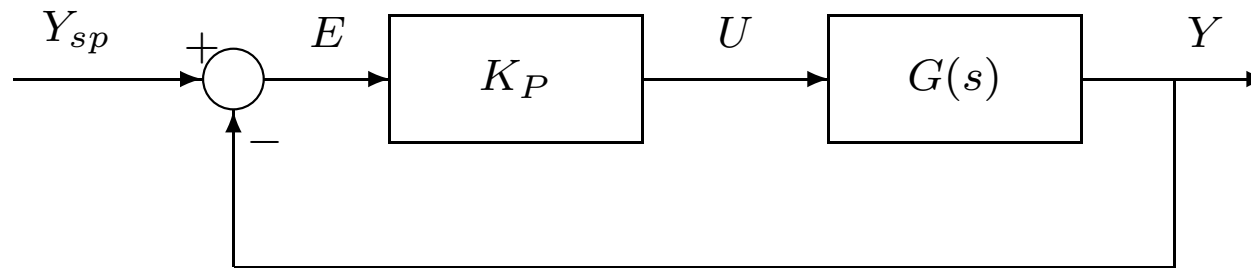
$$F(s) = \frac{10K_P}{1 + \frac{10K_P}{s^2 + 7s + 25}} = \frac{10K_P}{s^2 + 7s + (25 + 10K_P)} \quad (18)$$

- **IN QUESTO CASO, la stabilità del sistema in retroazione risulta garantita per qualsiasi valore di  $K_P$ .** Si può verificare applicando il criterio di Routh, oppure osservando che la parte reale dei poli risulta costante al variare di  $K_P$ :

$$\Re\{p\} = -\delta\omega_n = -3.5 \quad \forall K_P \in \mathbb{R} \quad (19)$$



# Controllo Proporzionale in Retroazione



- Valori elevati di  $K_P$  consentono di rendere piccolo l'errore a regime:

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 7s + 25}{s^2 + 7s + (25 + 10K_P)} = \frac{25}{25 + 10K_P} \xrightarrow{K_P \rightarrow \infty} 0 \quad (20)$$

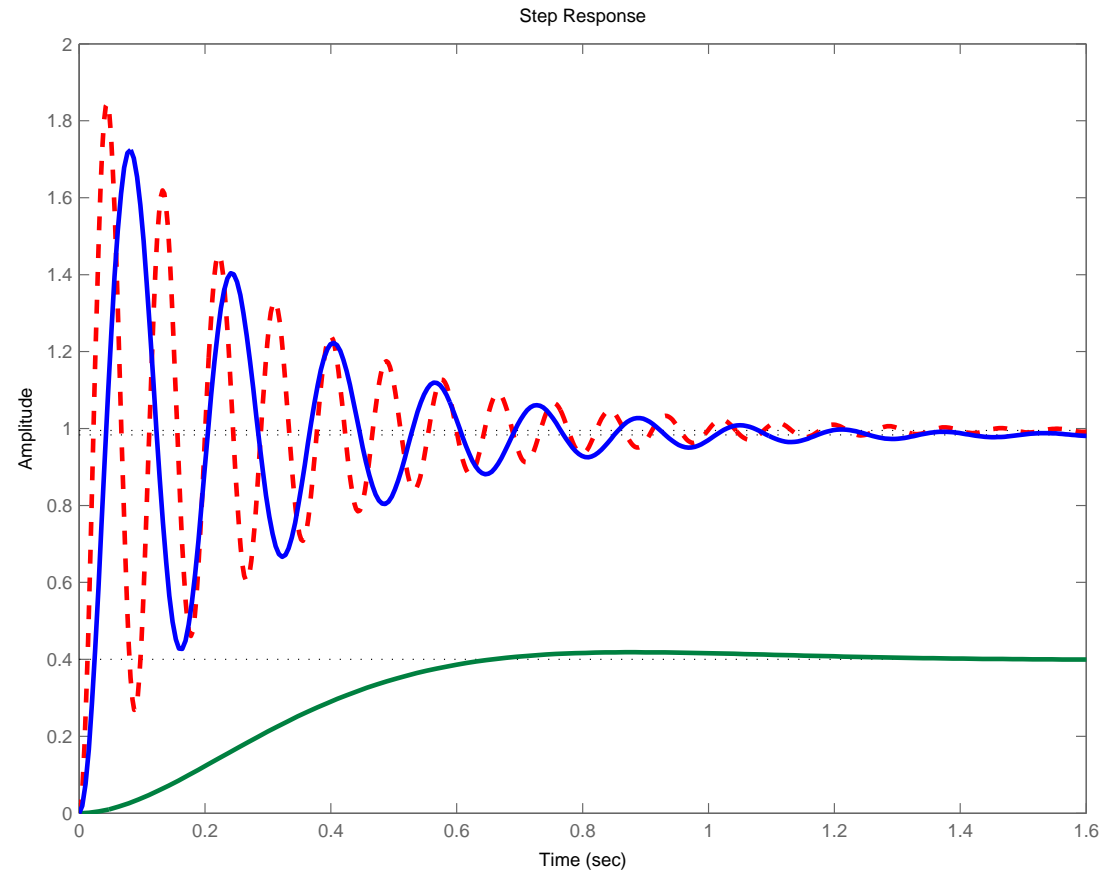
- Calcoliamo il valore di  $K_P$  necessario per ottenere un errore inferiore al 2%:

$$\frac{25}{25 + 10K_P} < 0.02 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K_P} > \mathbf{K_{P,min}} = \mathbf{122.5} \quad (21)$$

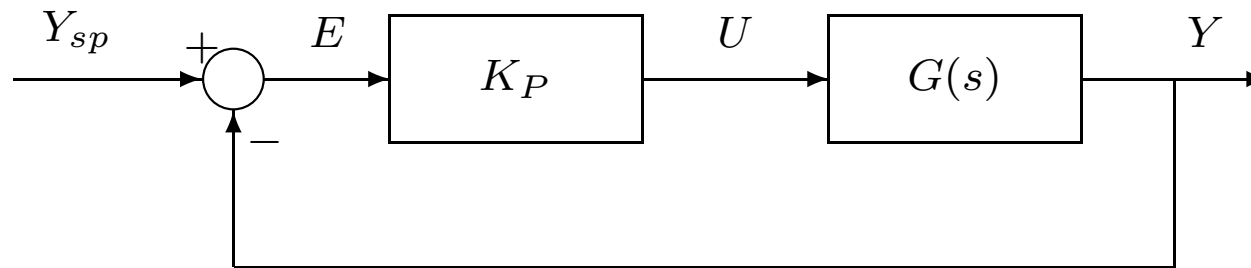
- Per garantire il soddisfacimento della specifica anche a fronte di disturbi e variazioni parametriche, scegliamo  $\mathbf{K_P} = 150$
- Si osservi inoltre che, **al crescere di  $K_P$ , il coefficiente di smorzamento dei poli complessi coniugati diminuisce** e, pertanto, la natura oscillatoria della risposta tende ad accentuarsi.

# Controllo Proporzionale in Retroazione

```
» KP=150;  
» F=feedback(KP*G,1)  
» dcgain(F)  
» KP1=500;  
» F1=feedback(KP1*G,1)  
» dcgain(F1)  
» step(G, F, F1)  
» pzmap(F,F1)
```



# Controllo Proporzionale in Retroazione



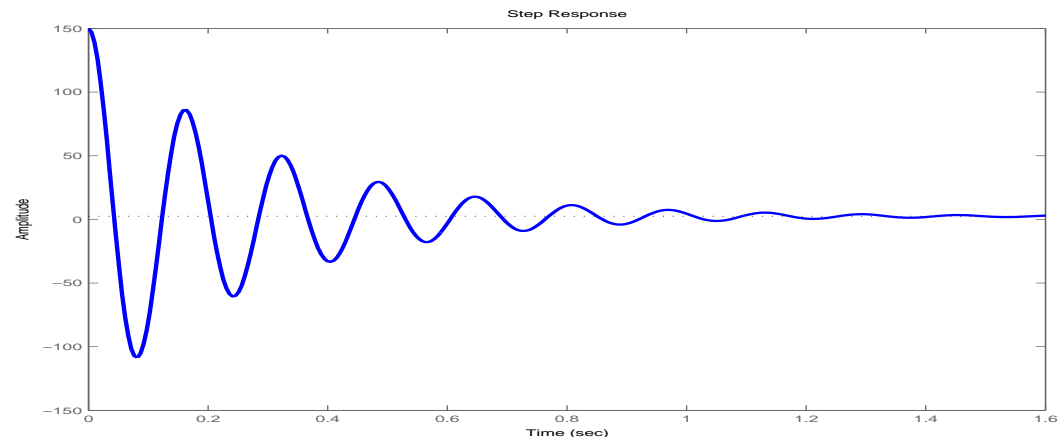
- La fdt tra ingresso  $y_{sp}$  ed azione di controllo  $u$  è:

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = K_P \frac{s^2 + 7s + 25}{s^2 + 7s + (25 + 10K_P)} \quad (22)$$

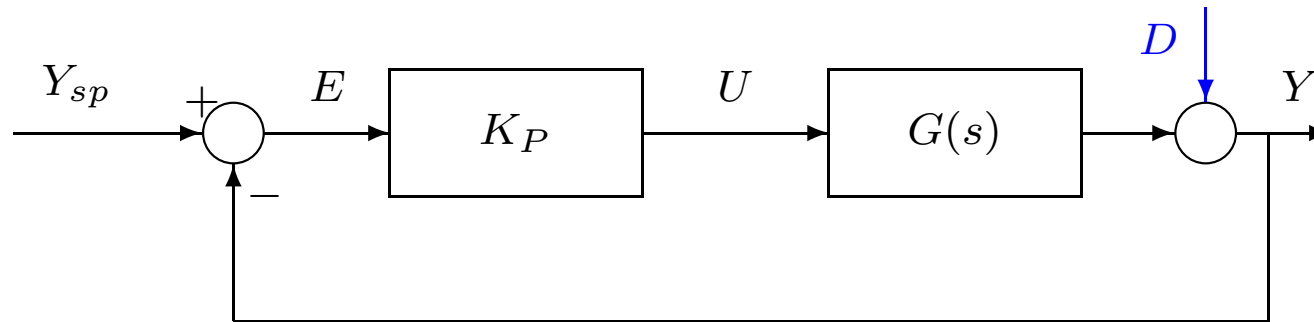
- Poiché i poli di  $Q(s)$  e  $F(s)$  sono gli stessi, anche su  $u$  ci aspetteremo un andamento oscillatorio per  $K_P$  elevato

Per calcolare  $Q(s)$ , si può pensare che  $R(s)$  sia sul ramo diretto e  $G(s)$  su quello di retroazione

- »  $Q = \text{feedback}(K_P, G)$
- »  $\text{step}(Q)$



# Controllo Proporzionale e Disturbi



- La funzione di sensitività  $S(s)$  oltre a rappresentare la fdt tra ingresso  $y_{sp}$  ed errore  $e$ , rappresenta anche la relazione tra disturbo  $d$  ed uscita controllata  $y$ :

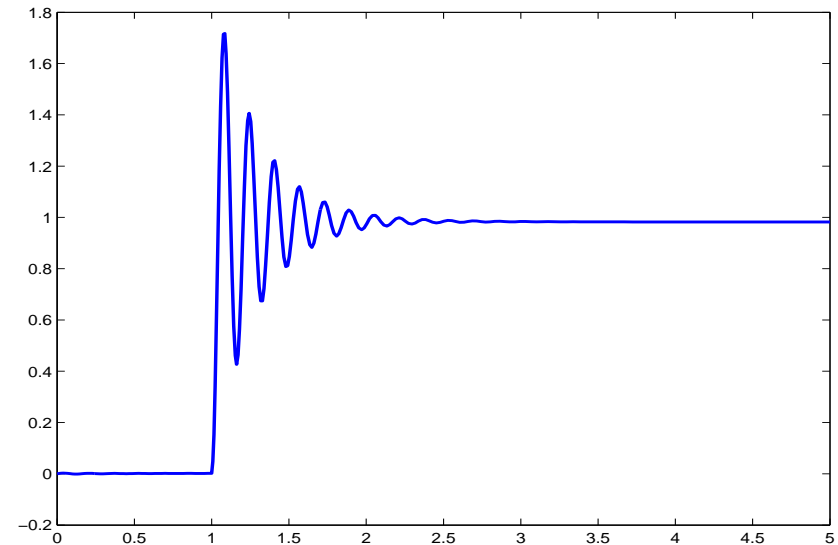
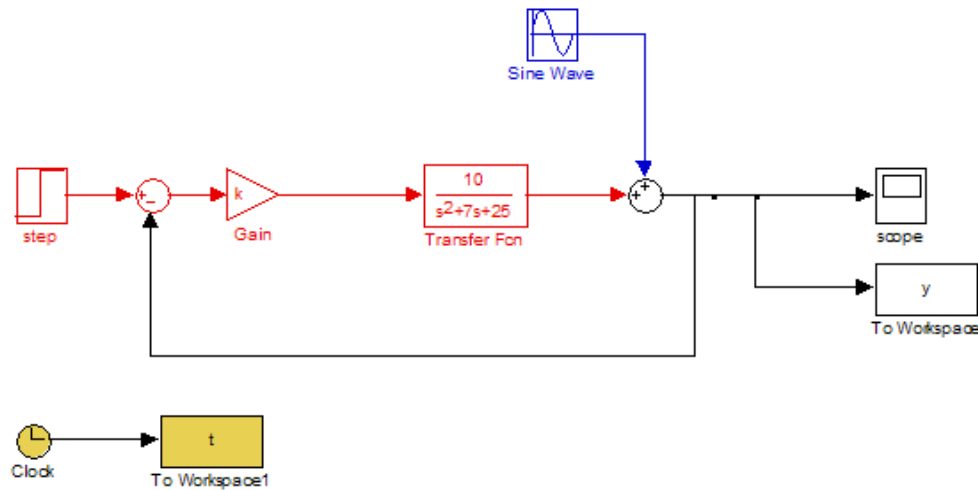
$$S(s) = \frac{E}{Y_{sp}} = \frac{Y}{D} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (23)$$

- $S(s)$  deve soddisfare sia alle specifiche sull'errore, sia ai requisiti di attenuazione dei disturbi
- In particolare vengono attenuati dalla retroazione tutti i disturbi collocati a frequenze tali che  $|L(j\omega)|$  sia elevato
- Ad esempio, calcoliamo il valore a regime dell'uscita provocato da un disturbo a gradino di ampiezza 0.2:

$$K_P = 150 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{0.2}{s} = 0.2 \frac{25}{25 + 1500} = 0.0033 \quad (24)$$

# Controllo Proporzionale e Disturbi

- Supponiamo, come nel caso precedente, un disturbo sinusoidale sovrapposto al riferimento



- Si valuti il comportamento del sistema al variare di  $K_P$  e delle caratteristiche del disturbo (ad es. ampiezza e frequenza della sinusoide, disturbi a gradino, ecc.)
- In conclusione, il valore di  $K_P$  costituisce un compromesso tra le necessità, contrastanti, di precisione a regime, attenuazione dei disturbi, rapidità di assestamento della risposta e moderazione dell'azione di controllo  $u$ .

# Contr. Proporzionale e Variazioni Parametriche

- Se, ancora una volta, il valore della costante elastica della molla differisce del 10% rispetto a quello nominale:

$$G_v(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 27.5} \quad \Longrightarrow \quad F_v(s) = \frac{10 \times 150}{s^2 + 7s + (27.5 + 10 \times 150)} \quad (25)$$

- L'errore a regime per ingresso a gradino unitario risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s S_v(s) \frac{1}{s} = \frac{27.5}{1527.5} = 0.018 \quad (26)$$

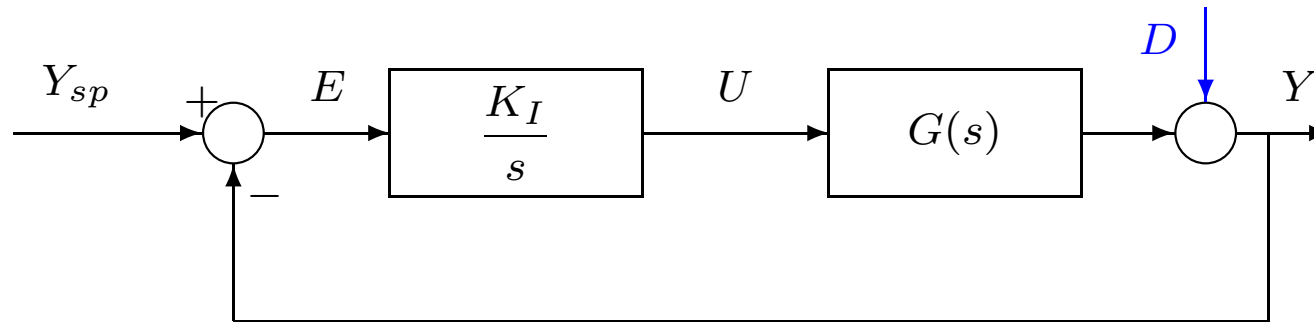
e la specifica continua ad essere soddisfatta

- Volendo calcolare il minimo valore di  $K_P$  che soddisfi il requisito sull'errore a regime, si osservi che:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K_P \frac{1}{s^2 + \frac{\beta}{m}s + \frac{\gamma}{m}}} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K_P \frac{1}{\gamma}} < 2\% \quad \Longrightarrow \quad K_P > 49\gamma = 49(\gamma_{nom} + \Delta\gamma) \quad (27)$$

supponendo nota la variazione massima del parametro  $\Delta\gamma_{MAX}$  si ottiene il valore di  $K_P$  richiesto ( $K_P > 49 \times 2.75 = 134.75$ ).

# Controllo Integrale in Retroazione



- Le funzioni di trasferimento caratteristiche del sistema sono:

$$L(s) = \frac{K_I}{s} G(s) \quad \text{guadagno di anello} \quad (28)$$

$$F(s) = \frac{\frac{K_I}{s} G(s)}{1 + \frac{K_I}{s} G(s)} = \frac{10K_I}{s^3 + 7s^2 + 25s + 10K_I} \quad \text{sensitività complementare} \quad (29)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_I}{s} G(s)} = \frac{s^3 + 7s^2 + 25s}{s^3 + 7s^2 + 25s + 10K_I} \quad \text{sensitività} \quad (30)$$

$$Q(s) = \frac{\frac{K_I}{s}}{1 + \frac{K_I}{s} G(s)} = \frac{K_I(s^2 + 7s + 25)}{s^3 + 7s^2 + 25s + 10K_I} \quad \text{sensitività del controllo} \quad (31)$$

- La presenza del polo nell'origine rende il sistema di tipo 1 e pertanto l'errore a regime per segnali di riferimento  $y_{sp}$  (o disturbi  $d$ ) a gradino, è NULLO per qualsiasi valore di  $K_I$  (si vede calcolando il limite per  $s \rightarrow 0$  di  $S(s)$ ).

# Controllo Integrale e Stabilità

- La presenza del polo nell'origine può rendere, per certi valori di  $K_I$ , instabile il sistema complessivo
- L'applicazione del criterio di Routh consente di determinare il range di valori di  $K_I$  che preservano la stabilità:

$$s^3 + 7s^2 + 25s + 10K_I = 0 \quad (32)$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 25 \\ 2 & 7 & 10K_I \\ 1 & 25 \times 7 - 10K_I & \\ 0 & 10K_I & \end{array} \implies 0 < K_I < 17.5$$

- Con Matlab, si traccino le risposte al gradino per  $K_I = 1, 10, 20$
- Si osservi che, per  $K_I = 1$ , il polo reale risulta molto più a destra (**dominante**) della coppia di poli complessi coniugati e pertanto la risposta al gradino risulta simile a quella di un sistema del primo ordine
- Per  $K_I = 10$  invece sono i poli complessi coniugati ad essere più lenti (**dominanti**) del polo reale e quindi la risposta è simile a quella di un sistema del secondo ordine.



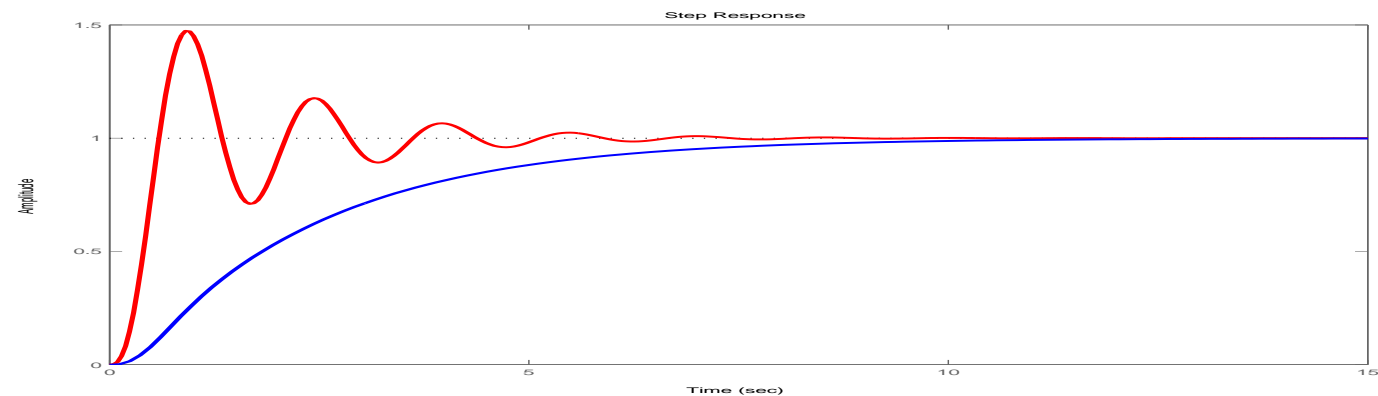
# Controllo Integrale e Prestazioni

- La presenza dell'integratore rende soddisfatta, per qualunque valore di  $K_I$ , la specifica sull'errore a regime:

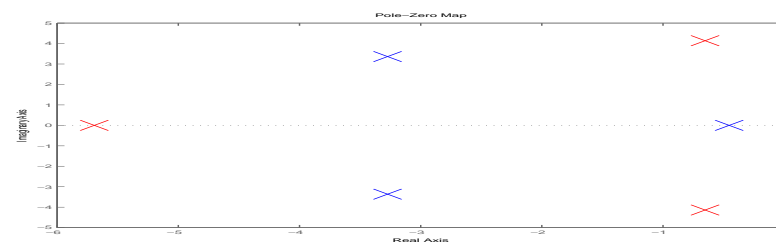
$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 7s^2 + 25s}{s^3 + 7s^2 + 25s + 10K_I} = 0 \quad (33)$$

- Il valore di  $K_I$  può essere scelto per migliorare le **prestazioni in transitorio**.

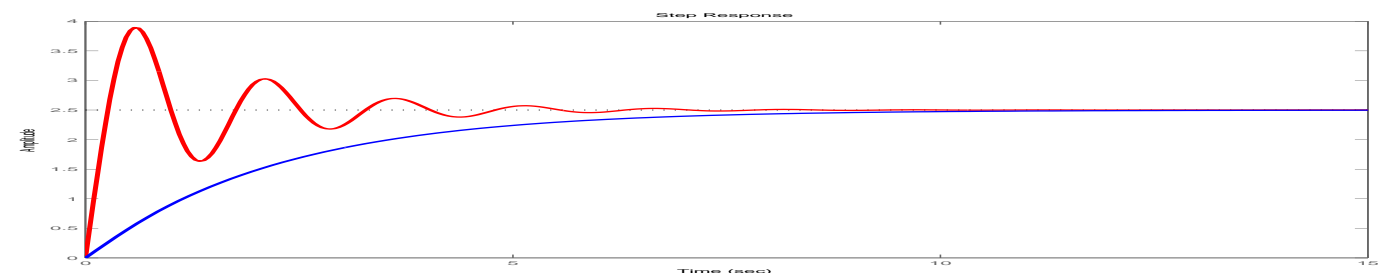
- » `KI1=1, KI2=10`
- » `R1=tf(KI1,[1 0])`
- » `R2=tf(KI2,[1 0])`
- » `L1=R1*G, L2=R2*G`
- » `F1=feedback(L1,1)`
- » `F2=feedback(L2,1)`
- » `step(F1,F2)`



- » `pzmap(F1,F2)`



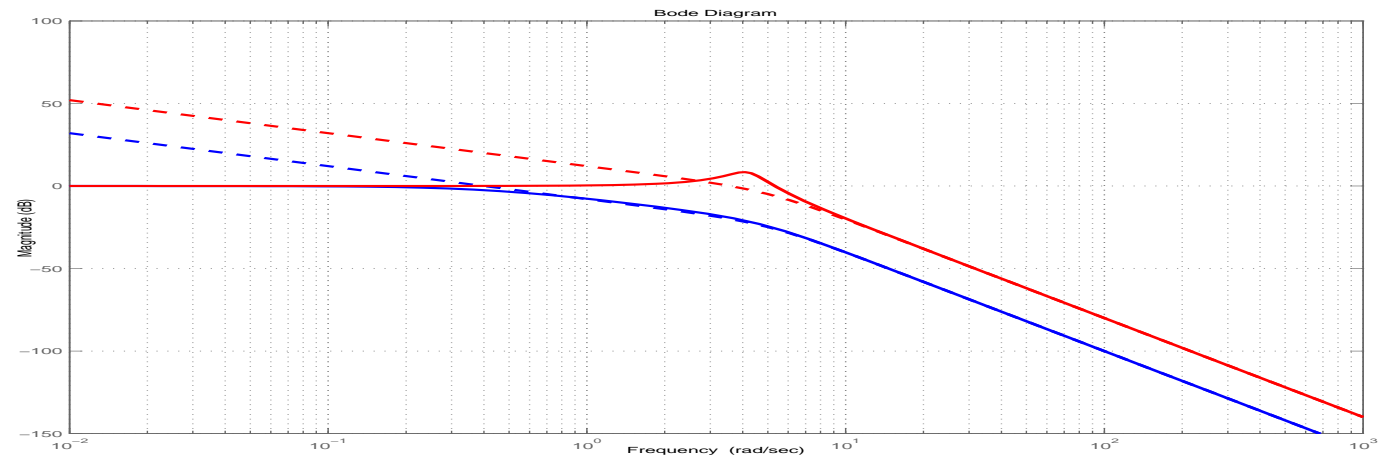
- » `Q1=feedback(R1,G)`
- » `Q2=feedback(R2,G)`
- » `step(Q1,Q2)`



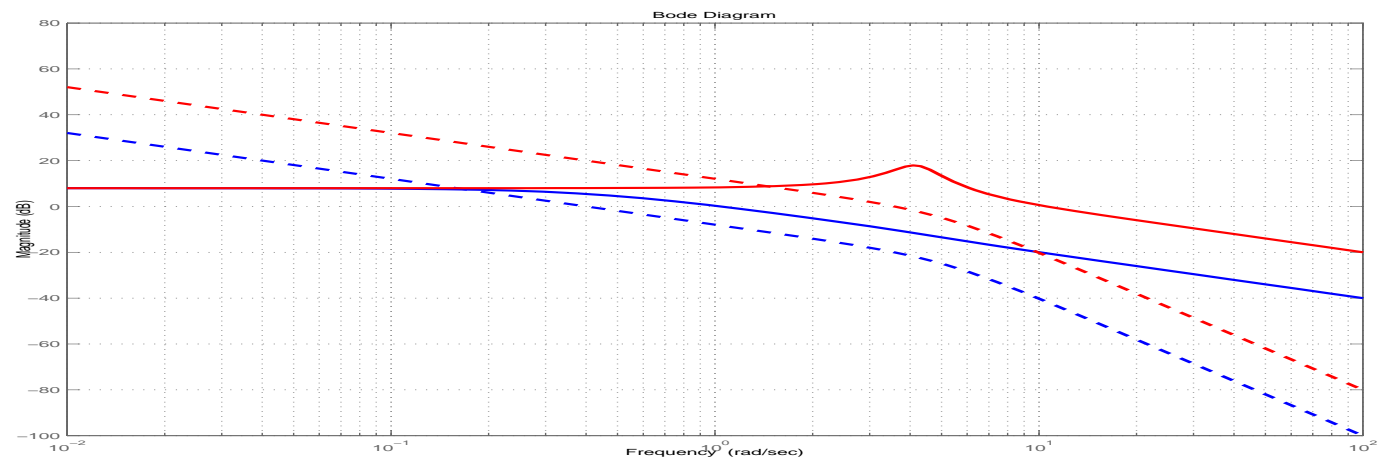
# Controllo Integrale e Prestazioni

- Considerazioni sulla larghezza di banda del sistema retroazionato possono essere svolte agevolmente sui diagrammi di Bode.
- Ad es. il passaggio di  $K_I$  da 1 a 10 allarga la banda del sistema e quindi ne aumenta la prontezza. Tutto questo però avviene a spese di un comportamento più oscillatorio (per via di un ridotto *margin di fase* del guadagno di anello).

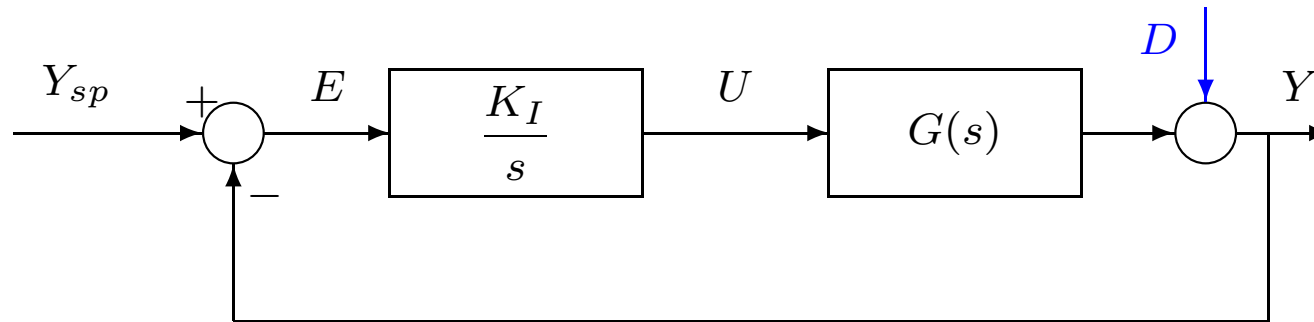
```
» bode(L1,F1)  
» hold on;  
» bode(L2,F2)
```



```
» bode(L1,Q1)  
» hold on;  
» bode(L2,Q2)
```



# Controllo Integrale e Disturbi



- Come già visto nel caso del controllo proporzionale, la funzione di sensitività  $S(s)$  esprime la relazione tra disturbo  $d$  ed uscita  $y$ :

$$S(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{s^3 + 7s^2 + 25s}{s^3 + 7s^2 + 25s + 10K_I} \quad (34)$$

- È del tutto evidente che, in caso di disturbi a gradino di qualunque ampiezza  $A$ :

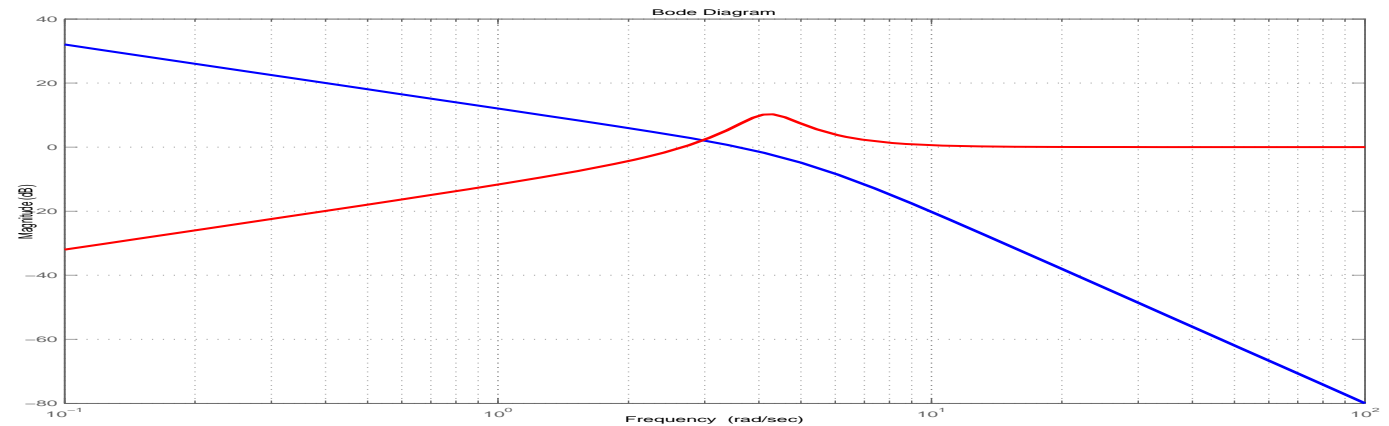
$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s} = 0 \quad (35)$$

- Questa proprietà di robustezza a fronte di disturbi costanti deriva dalla presenza dell'integratore nella funzione di anello.
- A fronte di disturbi che variano nel tempo, il comportamento del sistema può variare.

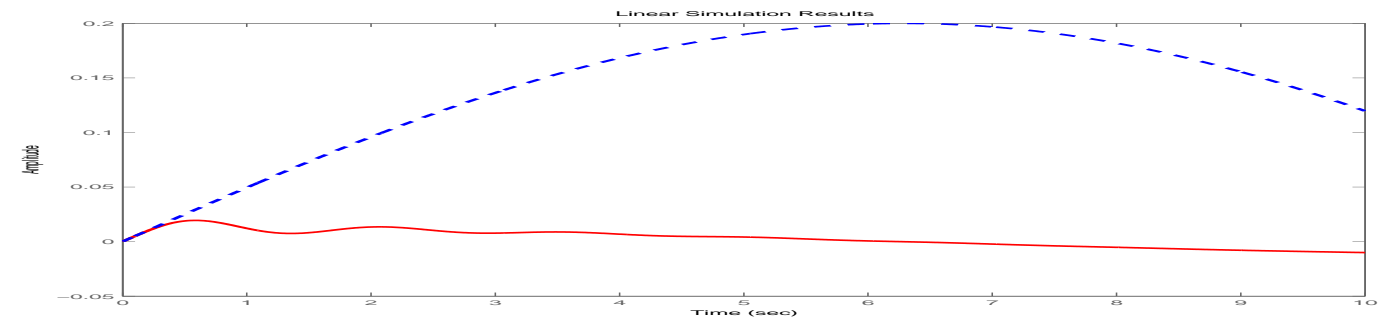
# Controllo Integrale e Disturbi

- Vengono attenuati dalla retroazione tutti i disturbi collocati a frequenze tali che  $|L(j\omega)|$  sia elevato, al contrario, quando  $|L(j\omega)|$  è piccolo, i disturbi  $d$  influenzano pesantemente l'uscita.

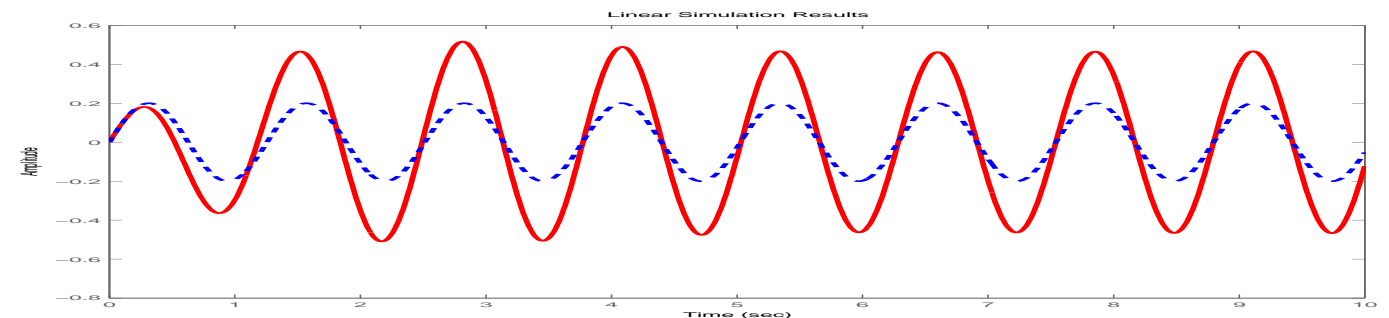
```
» KI=10
» R=tf(KI,[1 0])
» L=R*G
» S=feedback(1,L)
» bode(L,S)
```



```
» t=(0:0.01:10);
» d=0.2*sin(0.25*t);
» lsim(S,d,t)
```



```
» t=(0:0.01:10);
» d1=0.2*sin(5*t);
» lsim(S,d1,t)
```



# Controllo Integrale e Variazioni Parametriche

- Ancora una volta, supponiamo una variazione di  $\gamma = \gamma_{nom} + \Delta\gamma$  tale che la fdt vera del plant sia:

$$G_v(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 27.5} \quad (36)$$

- Le fdt caratteristiche del sistema risultano quindi:

$$L_v(s) = \frac{K_I}{s} G_v(s) \quad \text{guadagno di anello} \quad (37)$$

$$F_v(s) = \frac{\frac{K_I}{s} G_v(s)}{1 + \frac{K_I}{s} G_v(s)} = \frac{10K_I}{s^3 + 7s^2 + 27.5s + 10K_I} \quad \text{sensitività complementare} \quad (38)$$

$$S_v(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_I}{s} G_v(s)} = \frac{s^3 + 7s^2 + 27.5s}{s^3 + 7s^2 + 27.5s + 10K_I} \quad \text{sensitività} \quad (39)$$

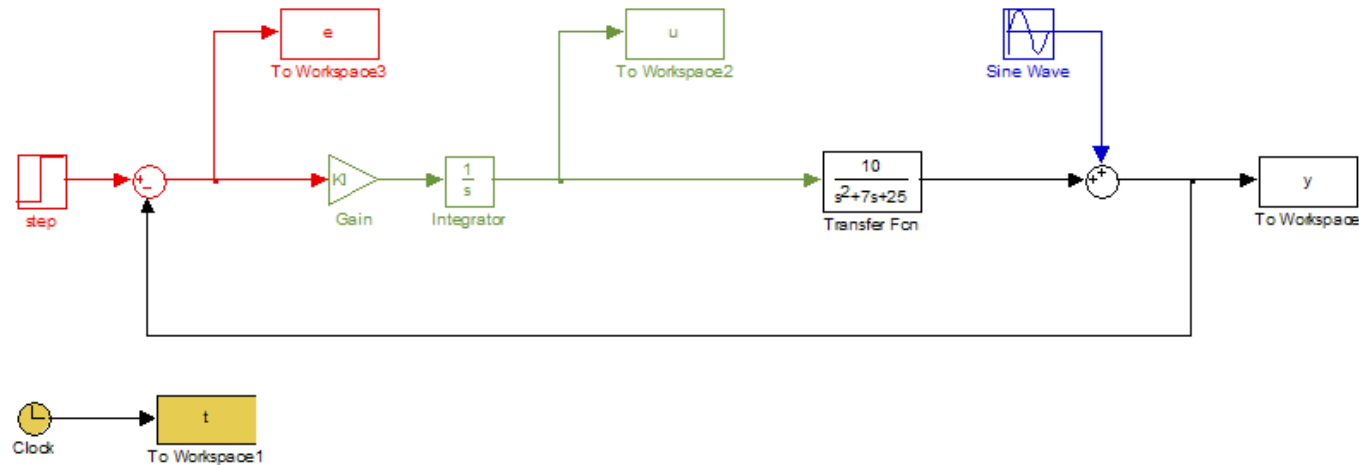
$$Q_v(s) = \frac{\frac{K_I}{s}}{1 + \frac{K_I}{s} G_v(s)} = \frac{K_I(s^2 + 7s + 27.5)}{s^3 + 7s^2 + 27.5s + 10K_I} \quad \text{sensitività del controllo} \quad (40)$$

- Si nota immediatamente che:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s S_v(s) \frac{1}{s} = 0 \quad (41)$$

e l'errore a regime rimane nullo nonostante la variazione della costante elastica della molla.

# Controllo Integrale - Schema Simulink



- Per esercizio, si calcoli l'errore a regime del sistema in risposta ad una rampa di pendenza 5. Da che cosa dipende l'entità di tale errore?
- Si provi a sostituire al blocco *step* il blocco *ramp* e, impostando la pendenza a 5, si verifichi il risultato ottenuto precedentemente
- Si sostituisca al disturbo sinusoidale un disturbo a gradino e si verifichi che la sua influenza sull'uscita è nulla asintoticamente. Si ripeta tale prova variando l'ampiezza del gradino.

# CONTROLLI AUTOMATICI L-B



## ESERCIZI SUL CONTROLLO IN RETROAZIONE - FINE

Ing. Nicola Diolaiti

DEIS-Università di Bologna

Tel. 051 2093079 / 68

e-mail: [ndiolaiti@deis.unibo.it](mailto:ndiolaiti@deis.unibo.it)

<http://www-lar.deis.unibo.it/people/ndiolaiti>